풀이

STEP III 2001, 문제 7

순수수학 • 직교 궤적

STEP III 2001, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q7

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리형(separable)이므로, 직접 풀면 곡선족이 무엇인지 바로 드러난다. 직교(orthogonal)하는 곡선의 경우, 접선(tangent)이 서로 수직이라는 것은 두 기울기(gradient)의 곱이 -1이라는 뜻이다. 이로부터 두 번째 변수분리형 방정식을 얻고, 이를 적분하면 처음에 그린 함수가 다시 나타난다. 첫 번째 그래프를 미리 그려 두는 것은 마지막 곡선을 거의 공짜로 그리기 위해서이다.

풀이

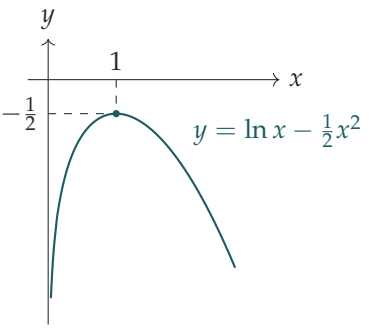
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$의 그래프

$x > 0$에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$을 생각하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

$x > 0$에서 정류점(stationary point)은 $x = 1$ 하나뿐이고, 이때 $f(1) = -\frac{1}{2}$이다. 모든 곳에서 $f'' < 0$이므로 이 점은 극대(maximum)이고, 그래프는 전체에서 위로 볼록(concave)하다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$이고, 그래프는 x축과 만나지 않는다.

정의역의 양 끝에서는, $x \to 0^+$일 때 ($\ln x \to -\infty$이므로) $f(x) \to -\infty$이고, 따라서 y축은 수직점근선(vertical asymptote)이다. 또 $\frac{1}{2}x^2$이 $\ln x$보다 훨씬 빠르게 커지므로 $x \to \infty$일 때도 $f(x) \to -\infty$이다.



포물선족

상수함수 $y = 0$은 해이다. 그 밖의 경우에는 방정식이 정의되지 않는 $x = \pm 1$을 피하여 변수를 분리한다.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2-1| + c.$$

따라서 $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2-1|$이다. 부호를 상수에 흡수시키고 $y = 0$도 포함하면, 해는

$$y = A(x^2-1), \qquad A\text{는 상수.}$$

역으로, 이러한 곡선은 모두 방정식을 만족한다. 왜냐하면

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2xy}{x^2-1}.$$

$A \neq 0$이면 각 곡선은 포물선(parabola)이다. $(1,0)$과 $(-1,0)$에서 $x^2-1=0$이므로 이 곡선은 두 점을 지난다. 기울기 $2Ax$는 $x=0$에서만 0이므로 꼭짓점(vertex)은 $(0,-A)$이고, 이는 y축 위에 있다. 이것이 구하는 곡선족이다.

직교하는 곡선

$x \neq \pm 1$이고 $y \neq 0$인 점 (x,y)를 잡자. 이 점을 지나는 곡선족의 포물선은 정확히 하나, 곧 $A = y/(x^2-1)$인 포물선이며, 그 점에서의 기울기는 $\dfrac{2xy}{x^2-1}$이다. 구하는 곡선이 이 포물선과 직각으로 만나려면 두 기울기의 곱이 -1이어야 하므로, 곡선은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-1}{2xy} = \frac{1-x^2}{2xy}.$$

을 만족해야 한다.

생각해 보기 기울기를 구할 때 공식 $y = A(x^2-1)$ 대신 포물선족의 미분방정식을 써도 되는 이유는 무엇인가?

미분방정식은 (x,y)를 지나는 곡선족 구성원의 기울기를 A와 무관하게 x와 y만으로 나타낸다. 직교하는 곡선은 각 점에서 서로 다른 포물선과 만나므로, 바로 이것이 우리에게 필요한 것이다.

다시 변수를 분리하면

$$2y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad\Longrightarrow\quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

이다. 여기서 곡선이 $(1,1)$을 지나므로 $x > 0$으로 잡았다. 우변은 처음에 그린 함수 $f(x) + C$이다. $(1,1)$에서 $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$이어야 하므로 $C = \frac{3}{2}$이고, 곡선은

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{또는 같은 말로} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

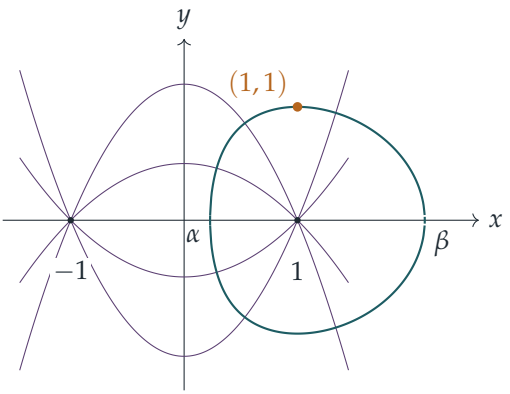
엄밀히 말하면, $(1,1)$을 지나는 미분방정식의 해는 위쪽 절반 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$이다. 이를 x축에 대하여 대칭이동한 것도 모든 포물선과 직교하므로, 자연스러운 답은 닫힌 곡선 전체이다.

곡선 그리기

실수인 점이 존재하려면 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$이어야 한다. 첫 번째 그래프에서 보았듯이 f는 $-\infty$에서 올라가 $x = 1$에서 최댓값 $-\frac{1}{2}$에 이른 뒤 다시 $-\infty$로 내려간다. 따라서 $f(x) = -\frac{3}{2}$는 $\alpha \in (0,1)$인 근 하나와 $\beta > 1$인 근 하나를 정확히 가진다. 수치적으로 $\alpha \approx 0.229$, $\beta \approx 2.123$이다. 그러므로

- 곡선은 띠 $\alpha \leq x \leq \beta$ 안에 놓이고 x축에 대하여 대칭이다.
- $x = 1$에서 y^2은 최댓값 1을 가지며, 이때 점 $(1, \pm 1)$을 얻고, 이 점들에서 접선은 수평이다.
- $(\alpha, 0)$과 $(\beta, 0)$에서는 $y^2 = 0$이지만 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$이므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 무한대가 되어 접선이 수직이다.

따라서 곡선은 한쪽으로 치우친 닫힌 타원 모양이다. 왼쪽에서는 가파르게 솟고 오른쪽에서는 더 완만하게 내려간다. 비교를 위해 포물선 몇 개를 함께 그렸다.



$x < 0$을 허용하고 $\ln x$를 $\ln|x|$로 바꾸면, 같은 계산으로 왼쪽 반평면에 대칭인 타원 모양 곡선도 얻는다. 그 곡선은 $(1,1)$을 지나지 않으므로 답에 포함되지 않는다.

검산

- $(1,1)$에서 곡선의 기울기는 $\frac{1-1}{2} = 0$이다. 모든 포물선은 직선 $x = 1$과 $(1,0)$에서만 만나므로, $(1,1)$ 자체를 지나는 포물선은 없다. $x = 1$ 근처에서 포물선들은 거의 수직이며, 이는 곡선의 접선이 수평이라는 사실과 잘 맞는다.
- 수치적으로, $x = 0.5$에서 곡선은 $y = \sqrt{\ln 0.5 - 0.125 + 1.5} \approx 0.826$이고 기울기는 $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)} \approx 0.908$이다. 그 점을 지나는 포물선의 기울기는 $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75} \approx -1.101$이고, $0.908 \times (-1.101) \approx -1$이다.
- 타원 모양 곡선 위의 무작위 점 수천 개에서 직교성을 확인하였고, 이분법(bisection)으로 근 $\alpha \approx 0.2291$과 $\beta \approx 2.1226$을 계산하였다.

흔한 실수

- 일반적인 점 (x,y)를 지나는 곡선족 구성원의 기울기 대신, 특정한 A에 대한 $2Ax$처럼 고정된 포물선 하나의 기울기를 쓰는 것.
- $y^2 = f(x) + \frac{3}{2}$이려면 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$이어야 한다는 것을 잊고, 닫힌 타원 모양 대신 유계가 아닌 곡선을 그리는 것.

STEP 너머

주어진 곡선족과 직각으로 만나는 곡선족을 찾는 문제를 **직교궤적**(*orthogonal trajectories*) 문제라고 한다. 물리학에서는 이것이 전기력선(field lines)과 등전위선(equipotentials)으로

나타나는데, 정전기학이나 2차원 유체 흐름이 그 예이다. 해석적(analytic) 복소함수의 실수부와 허수부는 언제나 이러한 두 곡선족을 이루며, 이는 등각사상(conformal mapping)으로 들어가는 한 가지 길이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초미분방정식)는 변수분리형 방정식과 직교궤적을 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소변수의 관점에서 본 모습을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.