풀이

STEP III 2001, 문제 6

순수수학 • 벡터와 삼각형의 중심

STEP III 2001, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q6

핵심 아이디어

모든 것은 평면의 법선벡터(normal vector) $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$가 결정한다. 점 $\mathbf{r}$가 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 1$이고, O와 M에서 평면에 내린 수선(perpendicular)은 모두 $\mathbf{n}$ 방향이다. 수심(orthocentre)과 외심(circumcentre)은 두 가지 3차원 기하 사실에서 나온다. 하나는 OA, OB, OC가 서로 수직이라는 것이고, 다른 하나는 M이 OA, OB, OC를 모서리로 하는 직육면체의 중심이어서 O, A, B, C로부터 같은 거리에 있다는 것이다. 마지막 부분에서는 두 수선이 평행하므로, 한 쌍의 닮은 삼각형(similar triangles)(또는 한 줄의 벡터 계산)으로 나머지가 해결된다.

풀이

풀이 전체에서 a, b, c는 0이 아니라고 한다(그렇지 않으면 평면이 세 축과 모두 만나지 않는다). 따라서

$$A = (a, 0, 0), \qquad B = (0, b, 0), \qquad C = (0, 0, c),$$

이고, $S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$이라고 쓴다.

무게중심

직선 OM 위의 점은 $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$ 꼴이다. 이를 평면의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$이므로 $t = \frac{2}{3}$이고, 만나는 점은

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

이다. 이는 삼각형 ABC의 무게중심(centroid)이다. 나중을 위해 $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$임을 기억해 두자.

O에서 내린 수선: 수심

O에서 내린 수선은 직선 $\lambda\mathbf{n}$이다. 이 직선은 $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$, 즉 $\lambda = 1/S$일 때 평면과 만나며, 그 점은

$$H = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

이다. 이제 $AH \perp BC$임을 보인다. $\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$를 이용하면

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{aS} - a\right)\cdot 0 + \frac{1}{bS}\cdot(-b) + \frac{1}{cS}\cdot c = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = 0.$$

생각해 보기 이 내적이 우연히 0이 된 것이 아니라 반드시 0이 되어야 하는 이유가 있을까?

있다. BC는 평면 위에 있으므로 법선 OH에 수직이다. 또한 BC는 yz-평면 위에 있으므로 x축 위에 놓인 OA에도 수직이다. 평행하지 않은 두 직선 OA와 OH에 모두 수직인 직선은 평면 OAH 전체에 수직이고, 특히 AH에 수직이다.

문자를 바꾸어 같은 논증을 적용하면 $BH \perp CA$, $CH \perp AB$이다. H는 삼각형이 놓인 평면 위에 있으므로, $AH \perp BC$는 H가 A에서 내린 높이선(altitude) 위에 있다는 뜻이고, 나머지 두 높이선에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 H는 삼각형 ABC의 수심이다.

M에서 내린 수선: 외심

M에서 내린 수선은 $M + \mu\mathbf{n}$이다. 이 직선은 $\frac{3}{2} + \mu S = 1$, 즉 $\mu = -\dfrac{1}{2S}$일 때 평면과 만나며, 그 점은

$$P = M - \frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

이다. 그런데 M은 O, A, B, C 네 점 모두로부터 같은 거리에 있다. 예를 들어

$$MA^2 = \left(\tfrac{1}{2}a - a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

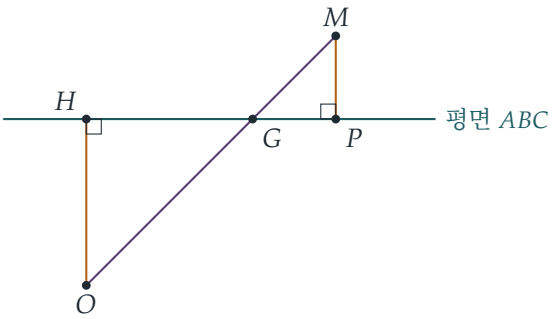
이고, 대칭성에 의해 MB^2, MC^2 (그리고 MO^2)도 같은 값이다. MP는 평면에 수직이고 PA는 평면 위에 있으므로 삼각형 MPA는 P에서 직각이다. 따라서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해

$$PA^2 = MA^2 - MP^2,$$

이고, 마찬가지로 $PB^2 = MB^2 - MP^2$, $PC^2 = MC^2 - MP^2$이다. 우변이 모두 같으므로 $PA = PB = PC$이다. 평면 위에서 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있는 점은 외심뿐이므로, P는 삼각형 ABC의 외심이다.

마지막 부분

수선 OH와 MP는 모두 $\mathbf{n}$에 평행하므로 O, H, M, P는 한 평면 위에 있고, 직선 OM은 삼각형의 평면과 G에서 만난다. 또한 $O \cdot \mathbf{n} = 0 < 1$이고 $M \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} > 1$이므로 O와 M은 삼각형의 평면에 대해 서로 반대쪽에 있다. 다음은 이 네 점을 지나는 단면이다.



삼각형 OHG와 MPG는 각각 H와 P에서 직각이고 G에서의 맞꼭지각(vertically opposite angles)이 같으므로 닮음이며, 닮음비는 $OG : GM = 2 : 1$이다. 따라서 $HG : GP = 2 : 1$이고, G는 선분 HP 위에 있다.

같은 결론은 벡터로부터 바로 얻을 수도 있다. $H = \frac{1}{S}\mathbf{n}$, $P = M - \frac{1}{2S}\mathbf{n}$, $G = \frac{2}{3}M$이므로

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

따라서 G는 수심 H에서 외심 P까지의 선분 위에 있고, 이 선분을 $HG : GP = 2 : 1$의 비로 나눈다. 이로써 증명이 끝난다. (삼각형이 정삼각형이면 $H = P = G$이므로 증명할 것이 없다.)

생각해 보기 이것으로 모든 삼각형에 대해 결과가 증명된 것일까?

꼭 그렇지는 않다. 이 논증을 적용하려면 삼각형이 위와 같은 꼴의 어떤 삼각형 ABC와 합동(congruent)이어야 한다. 그러면 변의 길이가 $BC^2 = b^2 + c^2$, $CA^2 = c^2 + a^2$, $AB^2 = a^2 + b^2$를 만족하므로

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

이고, B와 C에서도 마찬가지이다. 코사인 법칙(cosine rule)에 의해 모든 각은 예각이다. 역으로, 임의의 예각삼각형(acute triangle)은 이런 방식으로 실현할 수 있다. 위의 세 방정식을 a^2, b^2, c^2에 대해 풀면 모두 양수가 되기 때문이다. 따라서 이 방법은 예각삼각형에 대해 결과를 증명한다. 직각삼각형이나 둔각삼각형에 대해서는, 모든 경우를 포괄하는 다음의 짧은 평면 논증이 있다. 외심을 원점에 두면 꼭짓점 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 길이가 모두 같다. $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라 하자. 그러면

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

이므로 $\mathbf{h}$는 $\mathbf{a}$에서 내린 높이선 위에 있고, 대칭성에 의해 나머지 두 높이선 위에도 있다. 즉 수심이다. 무게중심은 $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2\cdot\mathbf{0})$이며, 이는 같은 $2:1$ 명제이다.

검산

$a = 1, b = c = 2$로 두면 $S = \frac{3}{2}$이다. 그러면 $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다. 각 점은 $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$을 만족한다. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$이고 $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$이며, $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$임을 확인할 수 있다. 또한 부호가 양과 음인 경우를 모두 포함하여 a, b, c를 무작위로 3000번 골라, 이 사실들을 모두 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- $AH \perp BC$만 보이고 멈추는 것. 세 높이선을 모두 보이거나, 분명하게 "대칭성에 의해"라고 말해야 한다. 또한 H가 삼각형의 평면 위에 있다는 것도 말해야 한다. 평면 밖의 점은 높이선 위에 있지 않으면서도 $AH \perp BC$를 만족할 수 있다.
- 비를 거꾸로 쓰는 것. 무게중심에서 수심까지의 거리는 무게중심에서 외심까지의 거리의 두 배이다.
- "따라서(hence)" 부분이 모든 삼각형을 포괄한다고 주장하는 것. 위에서 보였듯이 이 방법은 예각삼각형에만 적용된다.

STEP 너머

수심, 무게중심, 외심을 지나는 직선을 **오일러 직선**(*Euler line*)이라 한다. (외심을 원점에 둘 때) $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라는 사실은 구점원(nine-point circle)의 출발점이 되는데, 구점원의 중심 역시 오일러 직선 위에 있으며 H와 외심의 한가운데에 있다. 평면 도형을 간단한 3차원 도형의 단면으로 보는 기법은 기하학에서 거듭 등장하는 아이디어이다. 콕서터(Coxeter)의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)와 콕서터와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 모두 오일러 직선과 구점원을 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.