풀이

STEP III 2001, 문제 5

순수수학 • 포물선의 법선

> **STEP III 2001, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

핵심 아이디어

고정된 점 (h, k)를 지나는 법선(normal)이 어느 것인지 묻는 문제는 매개변수(parameter) t에 대한 삼차방정식(cubic)이 실근(real root)을 몇 개 갖는지 묻는 문제로 바뀐다. 이 삼차식에는 t^2 항이 없으므로, 첫 소문항에서 다룬 $t^3 + pt + q$ 꼴과 정확히 같다. 실근의 개수는 두 근이 합쳐져 중근(repeated root)이 될 때에만 바뀌므로, "법선이 하나"인 경우와 "법선이 셋"인 경우의 경계는 삼차식이 중근을 갖는 곳이다. 그 경계가 바로 우리가 구하려는 자취(locus)이다.

풀이

삼차식

$f(x) = x^3 + px + q$라 하자. $p \geq 0$이면 모든 x에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + p \geq 0$이고, $f'(x) = 0$은 기껏해야 한 점 $x = 0$에서만 성립할 수 있다($p = 0$일 때에만). 따라서 f는 $\mathbb{R}$에서 강한 증가함수(strictly increasing)이다. 실제로 $x_1 < x_2$이면 피적분함수(integrand)가 음이 아니고 많아야 한 점에서만 0이므로 $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x > 0$이다.

또한 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이고 $x \to +\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 어딘가에서 값 0을 갖고, 강한 증가함수이므로 그런 곳은 단 한 번뿐이다. 따라서 실수해는 정확히 하나이다.

(h,k)를 지나는 법선

C 위에서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이므로, 매개변수가 t인 점에서의 법선의 기울기(gradient)는 $-t$이다. (이는 $t=0$에서도 성립한다. 이때 접선(tangent)은 수직이고 법선은 x축이다.) 법선의 방정식은

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{즉} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

이 법선이 (h,k)를 지날 필요충분조건은 $k + th = 2at + at^3$, 즉

$$\boxed{at^3 + (2a-h)\,t - k = 0}$$ 또는 양변을 다음으로 나누면$a > 0$, $$t^3 + \frac{2a-h}{a}\,t - \frac{k}{a} = 0.$$

> **생각해 보기** 서로 다른 두 t 값이 같은 법선을 주어서, 근을 세면 법선을 중복하여 세게 되는 일이 있을 수 있을까?

그렇지 않다. t에서의 법선의 기울기는 $-t$이므로, 서로 다른 t 값은 기울기가 서로 다른 법선을 주고, 이들은 서로 다른 직선이다. 따라서 (h,k)를 지나는 법선의 개수는 삼차식의 서로 다른 실근의 개수와 정확히 같다.

$h \le 2a$이면 계수 $p = \dfrac{2a-h}{a}$는 ≥ 0이므로, 첫 소문항에 의해 삼차식은 정확히 하나의 실근을 갖는다. 그러므로 요구한 대로 (h,k)를 지나는 C의 법선은 정확히 하나이다.

법선이 정확히 두 개인 점들의 자취

삼차식을 $P = \dfrac{2a-h}{a}$, $Q = -\dfrac{k}{a}$로 두고 $t^3 + Pt + Q = 0$으로 쓰자. 실계수 삼차식은 중복도(multiplicity)를 고려하여 세면 실근을 하나 또는 셋 갖는다. 따라서 서로 **다른** 실근을 정확히 두 개 가질 필요충분조건은 이중근 s와 그와 다른 단근(simple root)을 하나 갖는 것이다.

t^2 항이 없으므로 근의 합은 0이고, 따라서 단근은 $-2s$이다. $-2s \ne s$이려면 $s \ne 0$이어야 한다. 계수를 비교하면

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2 t + 2s^3,$$

이므로 $P = -3s^2$, $Q = 2s^3$이다. 원래 변수로 되돌리면

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \ne 0.$$

s를 소거하기 위해 $(h-2a)^3 = 27a^3s^6$이고 $k^2 = 4a^2s^6$임에 주목하면, $4(h-2a)^3 = 108a^3s^6 = 27a\,k^2$이다.

역으로 $(h,k) \ne (2a,0)$이고 $27ak^2 = 4(h-2a)^3$이라 하자. 그러면 $h - 2a \ge 0$이고, 사실 $h > 2a$이다($h = 2a$이면 $k = 0$이기 때문이다). $2as^3 = -k$를 만족하는 실수를 s라 하자. 그

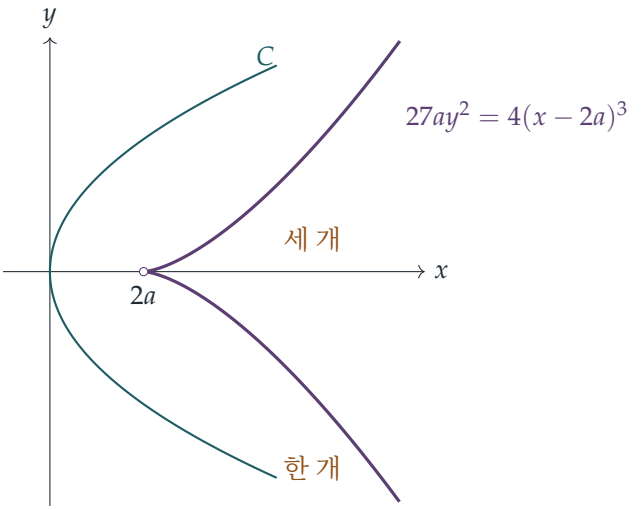
러면 $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$이므로 $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$이고, 따라서 $h-2a = 3as^2$이다. 그러므로 (h,k)는 $s \neq 0$인 위의 꼴이고, 이 점을 지나는 법선은 정확히 두 개이다. (이는 중근 조건 $4P^3 + 27Q^2 = 0$과 동치이다.)

점 $(2a, 0)$ 자체는 제외된다. 이 점에서는 $P = Q = 0$이고 삼차식은 삼중근을 갖는 $t^3 = 0$이 되어, 이 점을 지나는 법선은 하나(x축)뿐이다.

따라서 구하는 자취는

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{단, 다음 점은 제외: } (2a, 0).$$

이것은 $(2a, 0)$에 첨점(cusp)을 갖는 반삼차 포물선(semicubical parabola)으로, x축에 대하여 대칭이고 $x \geq 2a$인 영역에 놓이며, $y = \pm\frac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$이다. 그 안쪽($2a$보다 오른쪽의 양의 x축을 포함하는 영역)에서는 삼차식이 서로 다른 세 실근을 가지므로, 각 점을 지나는 법선이 세 개이다. 바깥쪽에서는 법선이 하나뿐이다.



그림은 $a = 1$인 경우이다. 속이 빈 원은 제외되는 첨점을 나타내고, 각 영역의 표시는 그 영역의 점을 지나는 법선의 개수를 나타낸다.

검산

- $a = 1, s = 1$로 두면 점 $(5, -2)$를 얻는다. 삼차식은 $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$이므로, $(1, 2)$와 $(4, -4)$에서의 법선이 모두 $(5, -2)$를 지난다. 실제로 $t = 1$에서의 법선은 $y + x = 3$이고 $t = -2$에서의 법선은 $y - 2x = -12$이다. 둘 다 $(5, -2)$를 지나며, $27 \cdot 4 = 108 = 4 \cdot 27$이다.
- ($a = 1$일 때) $(5, 0.1)$에서는 $4P^3 + 27Q^2 = -108 + 0.27 < 0$이므로 법선이 세 개이다.

$(5,4)$에서는 $-108+432>0$이므로 법선이 하나이다. 이는 그림과 일치한다.

- 법선의 방정식과 실근이 하나라는 주장을 무작위로 고른 수백 가지 경우에 대해 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 첨점 $(2a,0)$을 제외하는 것을 잊는 실수. 이 점에서 방정식은 성립하지만 법선은 하나뿐이다.
- $p\geq 0$일 때 $f'(x)>0$이라고 주장하는 실수. $p=0$이면 $f'(0)=0$이므로, 그래도 f가 강한 증가함수라는 조금 더 강한 논증이 필요하다.
- 법선의 기울기를 $-t$가 아니라 $1/t$(접선의 기울기)로 쓰는 실수.

STEP 너머

이 자취는 포물선의 **축폐선**(evolute)이다. 즉 포물선의 곡률 중심(centre of curvature)들이 그리는 곡선이며, 동시에 포물선의 법선들의 포락선(envelope)이기도 하다. 축폐선을 가로지르면 한 점을 지나는 법선의 개수가 2만큼 바뀌는데, 이는 파국 이론(catastrophe theory)과 삼차식의 판별식(discriminant) 뒤에 있는 아이디어의 첫 번째 예이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 정신의 STEP 문제가 더 실려 있다. Bruce와 Giblin의 *Curves and Singularities*는 축폐선과 포락선을 제대로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.