풀이

STEP III 2001, 문제 4

순수수학 • 역삼각함수

> **STEP III 2001, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q4

핵심 아이디어

식 $\dfrac{2x}{1+x^2}$를 보면 떠오르는 것이 있어야 한다. 이것은 $x = \tan\theta$일 때 $\sin 2\theta$에 대한 "t-공식(t-formula)"이다. $x = \tan\theta$로 치환하면 이 식의 $\sin^{-1}$은 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$가 되고, 문제 전체는 $\sin^{-1}(\sin\phi)$가 언제 정말로 ϕ를 되돌려 주는가에 대한 질문이 된다. 그 답은 ϕ가 주치역(principal range) $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하는지에 달려 있으며, 바로 여기서 $x = \pm 1$에서의 경우 나누기가 생긴다.

풀이

소문항 (i)

먼저 $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$의 기본적인 성질을 살펴본다.

- 분모는 결코 0이 되지 않으므로 g는 모든 곳에서 정의되고 연속(continuous)이다.
- $g(-x) = -g(x)$이므로 g는 기함수(odd function)이고, 그 그래프는 원점에 대하여 회전 대칭이다.
- $g(0) = 0$이고, $g(x)$는 x와 부호가 같으며, 분모는 x^2처럼 커지는 반면 분자는 x처럼만 커지므로 $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to 0$이다. 따라서 x축은 점근선(asymptote)이며, $x \to \infty$일 때는 위쪽에서, $x \to -\infty$일 때는 아래쪽에서 다가간다.

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

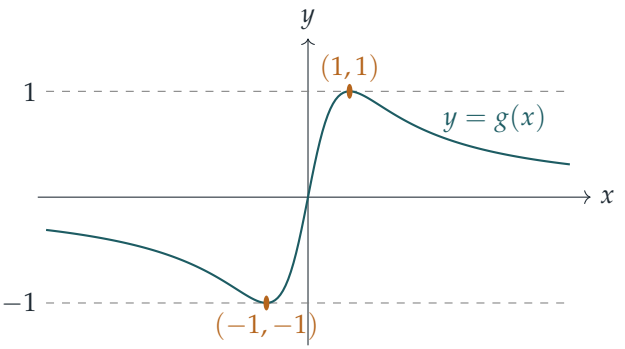
이 값은 $x = \pm 1$에서만 0이다. $|x| < 1$에서는 양수이고 $|x| > 1$에서는 음수이므로, $x = 1$에서 극댓값(maximum) $g(1) = 1$을, $x = -1$에서 극솟값(minimum) $g(-1) = -1$을 갖는다. 원점에서의 기울기(gradient)는 $g'(0) = 2$이다.

이 극점들이 전체에서의 최대, 최소라는 것은 미분 없이도 확인할 수 있다.

$$1 - g(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \qquad 1 + g(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0,$$

이므로 모든 x에 대하여 $-1 \leq g(x) \leq 1$이고, 등호는 $x = \mp 1$에서만 성립한다. g는 연속이고 -1과 1이라는 값을 가지므로, 그 사이의 모든 값을 갖는다(사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여). 따라서

함수g의 치역(range)은 $-1 \leq g(x) \leq 1$.



소문항 (ii)

소문항 (i)에 의하여 $\frac{2x}{1+x^2}$는 항상 $\sin^{-1}$의 정의역(domain)인 $[-1, 1]$에 속하므로, f는 모든 실수 x에 대하여 정의된다.

$\theta = \tan^{-1} x$라 하면 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$이고 $x = \tan\theta$이다. 그러면

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

이므로

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

? **생각해 보기** $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$는 그냥 2θ가 아닌가?

2θ가 $\sin^{-1}$의 치역, 즉 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속할 때에만 그렇다. 정의에 의하여 $\sin^{-1} y$는 그 구간에 속하면서 사인값이 y인 **유일한** 각이다. 따라서 $f(x)$를 구하려면 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하면서 2θ와 사인값이 같은 각을 찾아야 한다.

경우 $-1 \le x \le 1$**.** tan는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하므로, 이는 $-\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$를 뜻하고, 따라서 $-\frac{1}{2}\pi \le 2\theta \le \frac{1}{2}\pi$이다. 그러면 2θ 자체가 주치역에 속하면서 사인값이 $\sin 2\theta$인 각이므로

$$f(x) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (-1 \le x \le 1).$$

경우 $x \ge 1$**.** 이제 $\frac{1}{4}\pi \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi \le 2\theta < \pi$이고, 이는 주치역 밖이다. 그런데

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad \text{이고} \qquad 0 < \pi - 2\theta \le \tfrac{1}{2}\pi,$$

이므로 $\pi - 2\theta$가 주치역에 속하면서 올바른 사인값을 갖는 각이다. 따라서

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \ge 1).$$

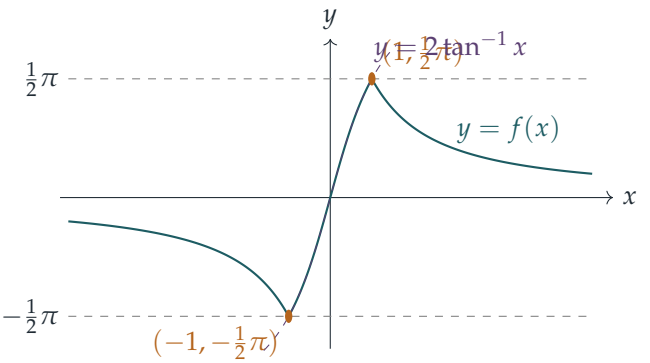
$x = 1$에서 두 공식은 모두 $\frac{1}{2}\pi$를 주며, 당연히 그래야 한다. 이것으로 "보여라" 부분이 끝난다.

그래프를 그리려면 $x \le -1$인 경우도 필요하다. g가 기함수이고 $\sin^{-1}$도 기함수이므로 f도 기함수이고, 따라서 $x \le -1$에 대하여 $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$이다. (마찬가지로, 이 범위에서는 $-\pi < 2\theta \le -\frac{1}{2}\pi$이고, $-\pi - 2\theta$가 $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$에 속하면서 사인값이 같은 각이다.)

그래프의 모양.

- $[-1, 1]$에서 $f(x) = 2\tan^{-1} x$는 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 증가하며, 기울기 2로 원점을 지난다.
- $x \ge 1$에서 $f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$는 $\frac{1}{2}\pi$에서부터 감소하고, $x \to \infty$일 때 위쪽에서 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$으로 다가간다. 기함수 성질에 의하여 $x \le -1$에서는 $-\frac{1}{2}\pi$에서부터 올라가며, $x \to -\infty$일 때 아래쪽에서 0으로 다가간다. 따라서 여기서도 x축이 점근선이다.
- 기울기는 $|x| < 1$에서 $\dfrac{2}{1+x^2}$이고 $|x| > 1$에서 $-\dfrac{2}{1+x^2}$이다. $x = 1$에서 기울기는 $+1$에서 -1로 갑자기 바뀌므로(그리고 $x = -1$에서도 마찬가지이므로), 그래프는 $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$에서 뾰족한 꺾인 점을 갖는다. 즉 f는 그곳에서 연속이지만 미분가능(differentiable)하지 않다.

꺾인 점은 연쇄 법칙(chain rule)으로부터 직접 확인할 수 있다. $f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$이고, 소문항 (i)에서 $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$을 얻었으며, 그 제곱근은 $|1-x^2|/(1+x^2)$이다. 따라서 $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$이고, 부호는 $1 - x^2$의 부호를 따른다.



점선 곡선은 $x = 1$을 지나서도 계속되는 $2\tan^{-1} x$를 나타낸다. 이 곡선은 $\frac{1}{2}\pi$보다 위로 올라가게 되는데, $\sin^{-1}$은 결코 그럴 수 없으므로 f는 대신 아래로 "반사"되어 내려온다.

검산

- $x = \sqrt{3}$일 때: $g(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$이고, 공식은 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$를 준다. 일치한다.
- $x = 10$일 때: $f(10) = \sin^{-1}(20/101) \approx 0.19934$이고, $\pi - 2\tan^{-1} 10 \approx 0.19934$이다. 컴퓨터로 $[-1, 1]$, $[1, 10^4]$, $[-10^4, -1]$ 각각에서 x의 무작위 값 10^5개를 시험한 결과 10^{-7}까지 일치하였고, $x = 1$에서의 한쪽 기울기는 $+1$과 -1로 나왔다.
- 만약 f가 모든 곳에서 $2\tan^{-1} x$라면 큰 x에 대하여 거의 π에 이르게 되는데, 이는 $\sin^{-1}$의 값으로는 불가능하다. 반사가 이 문제를 해결한다.

흔한 실수

- 2θ가 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하는지 확인하지 않고 $\sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$라고 쓰는 것.
- f를 $x = 1$에서 매끄럽고 둥근 꼭대기를 갖도록 그리는 것. $\sqrt{1 - g^2}$에는 $1 - x^2$가 아니라 $|1 - x^2|$가 들어가므로 그래프는 그곳에서 꺾인다.
- $x \to \pm\infty$일 때 f가 ($\pm\pi$가 아니라) 0으로 다가간다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

역삼각함수(inverse trigonometric function)는 **분지**(branch)를 고르는 첫 번째 예이다. sin은 일대일(one-to-one)이 아니므로 역함수를 만들기 전에 정의역을 제한해야 하고, 그러면 $\sin^{-1}(\sin\phi) = \phi$ 같은 항등식은 그 분지에서만 성립한다. 같은 문제가 복소해석

학(complex analysis)에서는 핵심이 되는데, 거기서는 $\log z$와 $z^{1/2}$에 분지 절단(branch cut)이 필요하다. $x = 1$에서의 꺾인 점은 또한 매끄러운 조각들로 만들어졌지만 한 점에서 연속이면서 미분가능하지 않은 함수의 깔끔한 예이기도 하다. 분지와 다가함수를 풍부한 그림과 함께 다룬 책으로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 연속성과 미분가능성에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.