풀이

STEP III 2001, 문제 3

순수수학 • 이차식의 근

> **STEP III 2001, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q3

핵심 아이디어

근(roots)에 대한 명제를 계수(coefficients)에 대한 명제로 바꾸어 생각한다. 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=b$, $\alpha\beta=c$이고, 근이 언제 실수인지는 판별식(discriminant)이 알려 준다. (ii)에서는 $f(x)=x^2-bx+c$의 그래프로 생각하는 편이 더 쉽다. 두 근이 모두 -1과 1 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓이는 것은 포물선(parabola)이 ±1에서 양수이고 그 꼭짓점(vertex)이 둘 사이에 있을 때, 그리고 오직 그때뿐이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $f(x)=x^2-bx+c$로 쓰고, 근이 실수일 때 두 근을 $\alpha\le\beta$라 하자. 그러면

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{b^2-4c}).$$

중근(repeated root)은 서로 같은 두 실근으로 센다.

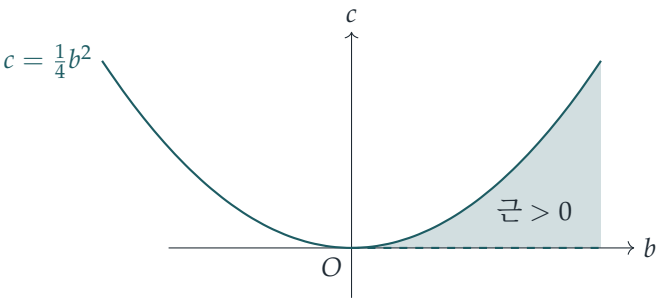
소문항 (i)

($\Rightarrow$) 두 근이 양의 실수라고 하자. 근이 실수이려면 $b^2-4c\ge0$이어야 한다. 또 두 근이 모두 양수이므로 $b=\alpha+\beta>0$이고 $c=\alpha\beta>0$이다. 이를 합치면 $b>0$이고 $b^2\ge4c>0$이다.

($\Leftarrow$) $b>0$이고 $b^2\ge4c>0$이라고 하자. $b^2-4c\ge0$이므로 두 근은 실수이다. $\alpha\beta=c>0$이므로 두 근은 0이 아니고 부호가 같다. $\alpha+\beta=b>0$이므로 그 공통 부호는 음일 수 없다. 따라서 두 근은 모두 양수이다.

이로써 동치(equivalence)가 증명되었다. b-c 평면에서 이 조건은 $b>0$이고 $0<c\le\frac{1}{4}b^2$이라는 뜻이다. 즉 제1사분면(first quadrant)에서 양의 b축과 포물선 $c=\frac{1}{4}b^2$ 사이의 영역이

다. 포물선은 포함되고(중근 $\frac{1}{2}b > 0$), b축은 제외된다(거기서는 $c = 0$이어서 한 근이 0이다).



실선 곡선($b > 0$인 부분)은 영역에 속하고, b축의 점선 부분과 원점은 속하지 않는다.

소문항 (ii)

두 근이 실수이고 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$이어야 한다. 근이 실수일 때, 이것이 성립할 필요충분조건은

$$f(1) = 1 - b + c > 0, \qquad f(-1) = 1 + b + c > 0, \qquad -1 < \tfrac{1}{2}b < 1.$$

임을 보이자.

($\Rightarrow$) $-1 < \alpha \leq \beta < 1$이면 각 괄호가 양수이므로 $f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) > 0$이고 $f(-1) = (1+\alpha)(1+\beta) > 0$이다. 또 $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$는 $(-1,1)$에 속하는 두 수의 평균이므로 $(-1,1)$에 속한다.

($\Leftarrow$) $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$는 정확히 $[\alpha,\beta]$에서만 ≤ 0이므로, 조건 $f(1) > 0$은 1이 $[\alpha,\beta]$에 속하지 않는다는 뜻이다. 따라서 $1 < \alpha$이거나 $1 > \beta$이다. 꼭짓점 $\frac{1}{2}b$는 $[\alpha,\beta]$에 속하고 $\frac{1}{2}b < 1$이므로 $\alpha \leq \frac{1}{2}b < 1$이다. 그러므로 $1 < \alpha$는 불가능하고 $\beta < 1$이다. 같은 방법으로 $f(-1) > 0$과 $\frac{1}{2}b > -1$로부터 $\alpha > -1$을 얻는다.

? **생각해 보기** 왜 $f(1) > 0$과 $f(-1) > 0$만으로는 충분하지 않을까?

두 근이 구간의 같은 쪽 바깥에 함께 놓일 수 있기 때문이다. 예를 들어 $x^2 - 5x + 6 = 0$의 두 근은 2와 3이지만 $f(\pm 1) > 0$이다. 두 근이 모두 한쪽 끝 너머에 있지 않고 -1과 1 사이에 놓이도록 해 주는 것이 바로 꼭짓점 조건 $|b| < 2$이다.

이 조건들을 실근 조건 $b^2 \geq 4c$와 합치면 영역은

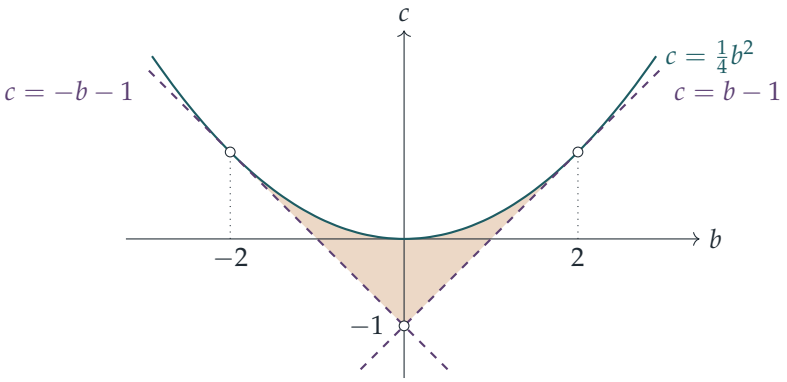
$$|b| < 2, \qquad c > b - 1, \qquad c > -b - 1, \qquad c \leq \tfrac{1}{4}b^2,$$

즉 $|b| < 2$이고 $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$이다.

영역을 그리기 위해 두 직선이 포물선과 어떻게 만나는지 살펴보자.

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

이므로 직선 $c = b - 1$은 포물선 아래에 있고 $(2,1)$에서만 포물선과 만난다. 따라서 이 직선은 그 점에서의 접선(tangent)이다. 대칭성($b \mapsto -b$)에 의해 $c = -b - 1$은 $(-2,1)$에서의 접선이다. 두 직선은 $(0,-1)$에서 만난다. 영역은 이 두 접선과 두 접점 사이의 포물선 호로 둘러싸인 곡선 삼각형이다.



$|b| < 2$인 포물선의 호는 포함된다($|\tfrac{1}{2}b| < 1$인 중근 $\tfrac{1}{2}b$). 점선으로 그린 두 접선 선분은 그 위에서 한 근이 ± 1이므로 제외된다. 세 꼭짓점 $(\pm 2, 1)$과 $(0,-1)$도 제외된다.

검산

- $(b,c) = (0,-\tfrac{1}{4})$는 (ii)의 영역 안에 있다. 두 근은 $\pm\tfrac{1}{2}$이다. $(b,c) = (0,-1)$은 제외되는 꼭짓점이다. 두 근이 정확히 ± 1이다.
- $(b,c) = (2.7, 1.8)$은 $c > |b| - 1$과 $c \leq \tfrac{1}{4}b^2$을 만족하지만 $|b| > 2$이다. 두 근은 1.2와 1.5이므로, 꼭짓점 조건에 의해 올바르게 제외된다.
- 두 영역 모두 수치적으로 검사하였다. 모든 경계 곡선 위의 점을 포함한 115 000개가 넘는 유리점 (b,c)에서 실제 근과 위의 조건을 비교하였고, 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- (ii)에서 꼭짓점 조건 $|b| < 2$를 빠뜨리는 것. 그러면 $|b| = 2$ 너머에서 각 접선과 포물선 사이의 가느다란 띠가 잘못 추가된다.
- 경계를 잘못 처리하는 것. 포물선은 두 소문항 모두에서 포함되지만, (i)의 b축과 (ii)의 접선은 포함되지 않는다.

STEP 너머

$f(\pm 1)$과 꼭짓점에 대한 조건은 "다항식의 모든 근이 주어진 영역 안에 놓이는 것은 언제인가?"라는 일반적인 질문의 작은 사례이다. 단위원판(unit disc)에 대해서는 슈어-콘 판정법(Schur–Cohn test)이 이 질문에 답한다. 왼쪽 반평면(left half-plane)에 대해서는 라우스-후르비츠 판정법(Routh–Hurwitz criterion)이 답하는데, 제어 공학자들은 이를 이용해 시스템이 안정한지 판단한다. (ii)는 정확히 특성근(characteristic roots)이 실수인 점화식(recurrence) $u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$의 안정성(stability) 영역이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.