풀이

STEP III 2001, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 치환과 넓이

> **STEP III 2001, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q2

핵심 아이디어

두 부등식(inequality)은 모두 "직각쌍곡선(rectangular hyperbola) 꼴의 곡선의 한쪽에 머문다"는 뜻이므로, 먼저 두 쌍곡선(hyperbola)을 그리고 두 곡선이 만나는 점을 찾는다. 그러면 영역은 유계이고 네 방향으로 대칭인 조각이 되며, 그 넓이는 $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분(integral) 두 개로 나타난다. 이것은 바로 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)으로 다루기 좋은 적분이며, 앞부분은 그 결과로 나오는 $\cosh^{-1}$ (그리고 $\sinh^{-1}$)의 값을 로그(logarithm)로 바꾸기 위해 있는 것이다.

풀이

$\cosh^{-1} x$의 로그 꼴

$x \geq 1$이라 하고 $y = \cosh^{-1} x$라 하자. 정의에 따라 이는 $\cosh y = x$를 만족하는 음이 아닌 수이다. 그러면

$$x = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} + 1 = 0,$$

이고, 이는 e^{y}에 대한 이차방정식(quadratic equation)이므로

$$\mathrm{e}^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **생각해 보기** 어느 부호를 택해야 하며, 그 이유는 무엇인가?

두 근(root)의 곱은 이차방정식의 상수항인 1이고, 플러스 부호를 택한 근은 1 이상이다. 따라서 마이너스 부호를 택한 근은 1 이하이고, 이 근은 $y \leq 0$을 준다. $y \geq 0$이므로 플러스 부호를 택해야 하며 ($x = 1$일 때는 어차피 두 근이 같다), 따라서

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. $x = \sinh y$로 놓고 똑같이 논증하면 $e^{2y} - 2x\,e^{y} - 1 = 0$을 얻는다. 이번에는 두 근의 곱이 -1이므로 플러스 부호의 근만 양수이고, 따라서 $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$이다. 아래에서 두 결과를 모두 사용한다.

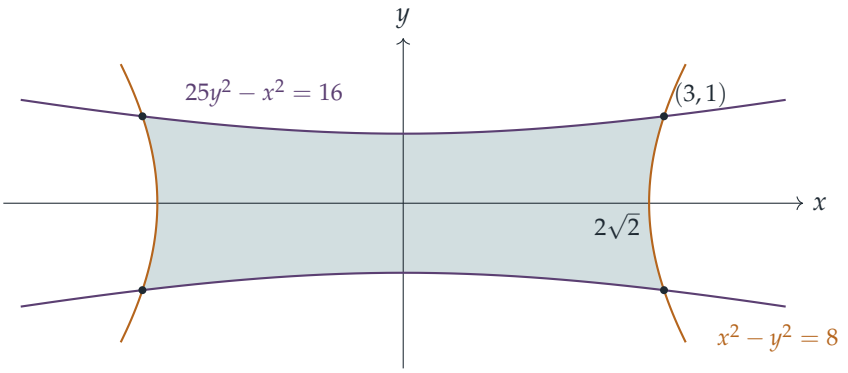
영역

부등식을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad \text{그리고} \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

곡선 $x^2 - y^2 = 8$은 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$을 지나며 가지가 왼쪽과 오른쪽으로 열린 쌍곡선이다. 첫 번째 부등식은 점이 두 가지의 사이에 있게 한다. 즉 $|x| \le \sqrt{y^2+8}$이다. 곡선 $25y^2 - x^2 = 16$은 $(0, \pm\frac{4}{5})$를 지나며 가지가 위와 아래로 열린 쌍곡선이다. 두 번째 부등식은 점이 이 두 가지의 사이에 있게 한다. 즉 $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$이다.

두 곡선은 $x^2 = y^2 + 8$이고 $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$인 곳에서 만나므로 $y^2 = 1$, $x^2 = 9$이다. 즉 네 점 $(\pm 3, \pm 1)$에서 만난다.



(색칠한) 영역은 유계(bounded)이다. (x, y)가 이 영역에 속하면 $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2 + 16) + 8$이므로 $x^2 \le 9$이고, 그러면 $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$이다. 두 부등식은 모두 $x \mapsto -x$와 $y \mapsto -y$에 대해 변하지 않으므로, 영역은 두 축에 대해 대칭이고 그 넓이는 제1사분면(first quadrant)에 있는 부분의 넓이 A의 네 배이다.

제1사분면에서 영역을 세로로 자른다.

- $0 \le x \le 2\sqrt{2}$이면 $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$이므로 첫 번째 부등식은 저절로 성립하고, y는 0부터 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$까지 움직인다.
- $2\sqrt{2} \le x \le 3$이면 y는 $\sqrt{x^2-8}$부터 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$까지 움직인다 (교점을 구한 계산에 따르면, 아래쪽 곡선이 위쪽 곡선보다 아래에 있는 것은 정확히 $x^2 \le 9$일 때이다).

따라서

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

첫 번째 적분

$x = 4\sinh s$로 치환하면 $\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$이고 $\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$이다 ($\cosh s > 0$이므로 양수이다). 적분 구간의 끝은 $s = 0$과 $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$이다. $\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[8\sinh s\cosh s + 8s\Big]_0^S \\ &= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sinh S = \frac{3}{4}$이고 $\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$이기 때문이다.

두 번째 적분

$t \geq 0$인 $x = 2\sqrt{2}\cosh t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$이고 $\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$이다 ($t \geq 0$이므로 양수이다). 적분 구간의 끝은 $t = 0$과, 앞부분의 결과에 따라

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

이다. $\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[4\sinh t\cosh t - 4t\Big]_0^T \\ &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$이고 $\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이기 때문이다.

종합하기

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

대수적인 부분은 정확히 상쇄되고, 전체 넓이는

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

검산

- $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$이다. 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx 13.0452$, $I_2 \approx 0.11371$을 얻는데, 이는 각각 $\frac{15}{2} + 8\ln 2$, $\frac{3}{2} - 2\ln 2$와 일치한다. 또 촘촘한 격자점 가운데 두 부등식을 모두 만족하는 점을 세기만 해도 넓이가 약 9.98로 나온다.

- 크기에 대한 점검: 영역은 넓이가 12인 직사각형 $[-3,3]\times[-1,1]$ 안에 들어가고, 이 직사각형의 모서리 부분에서 가느다란 조각만 빠지므로, 넓이가 10보다 조금 작은 것은 타당하다.
- $\cosh^{-1}1=\ln 1=0$으로, 당연히 그래야 하는 값이 나온다.

흔한 실수

- 부등식을 쌍곡선의 "바깥쪽"으로 읽는 것: $y^2\geq x^2-8$은 $x^2-y^2=8$의 두 가지 **사이**의 영역이며, 이 영역은 y축을 포함한다.
- 첫 번째 부등식이 $x>2\sqrt{2}$일 때만 실제로 제약이 된다는 것을 잊고 $\int_0^3\sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$를 빼는 것. 이 적분은 실수조차 아니다.
- $\mathrm{e}^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$에서 마이너스 부호를 택하는 것. 그러면 $-\cosh^{-1}x$가 나온다.

STEP 너머

두 부류의 적분 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$와 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$를 쌍곡선 치환으로 다루는 것은 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$를 $x=a\sin\theta$로 다루는 것과 같은 이유에서이다. 항등식(identity) $\cosh^2-\sinh^2=1$이 제곱근을 없애 주기 때문이다. 사실 쌍곡선함수(hyperbolic function)는 **넓이**를 잰다. θ가 원의 부채꼴(sector) 넓이의 두 배인 것과 마찬가지로, $(\cosh t,\sinh t)$의 매개변수 t는 단위 쌍곡선의 부채꼴 넓이의 두 배이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 성격의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 지수함수(exponential function)와 로그, 그리고 이를 바탕으로 쌍곡선함수를 어떻게 엄밀하게 정초하는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.