풀이

STEP III 2001, 문제 11

역학 • 회전 에너지 보존

STEP III 2001, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q11

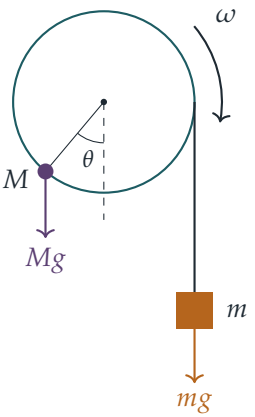
핵심 아이디어

모든 것이 매끄럽다(축은 마찰이 없고 줄은 가볍다). 따라서 역학적 에너지가 보존되며(conservation of mechanical energy), 장력(tension)이나 힘을 따질 필요 없이 에너지 방정식 하나로 ω를 θ의 함수로 얻는다. 원기둥은 정확히 ω^2이 0이 될 때 멈춘다. 그러므로 둘째 부분은 θ에 대한 함수 하나에 관한 질문이 된다. 매달린 질량이 잃는 위치 에너지(potential energy)가 언제나 입자가 얻는 위치 에너지보다 커야 한다. 식을 정리하면 이는 m/M과 $(1-\cos\theta)/\theta$의 최댓값을 비교하는 문제가 되고, 이는 간단한 최대화 문제이다.

풀이

각속도

m과 M을 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 원기둥 위에서 미끄러지지 않는 것으로, 축은 매끄러운 것으로 모형화한다. 원기둥이 m이 내려가는 방향으로 각 θ만큼 돌았다고 하고, $\omega = \dot{\theta}$라 하자.



원기둥이 θ만큼 돌면 길이 $a\theta$의 줄이 풀리므로, m은 $a\theta$만큼 내려가고 속력 $a\omega$로 움직인다. 입자 M은 테두리 위에 있으므로 속력 $a\omega$로 움직인다. 이 입자는 처음에 축보다 a만큼 아래에 있었고 지금은 $a\cos\theta$만큼 아래에 있으므로, $a(1-\cos\theta)$만큼 올라갔다.

운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}M(a\omega)^2 + \tfrac{1}{2}m(a\omega)^2 = \tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2.$$

이다. 매끄러운 축은 일을 하지 않고, 가볍고 늘어나지 않는 줄은 에너지를 손실 없이 전달한다. 따라서 운동 에너지의 증가량은 위치 에너지의 알짜 감소량과 같다.

$$\tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2 = mga\theta - Mga(1-\cos\theta),$$

따라서

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}} \qquad \text{그리고} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}}.$$

이다.

모형화와 관련하여 확인할 점이 하나 있다. 줄이 계속 팽팽해야 한다. 에너지 방정식을 시간에 대해 미분하면 $\big(I + (M+m)a^2\big)\ddot{\theta} = ga(m - M\sin\theta)$를 얻고, 장력은 $T = m(g - a\ddot{\theta})$이다. 그런데 $a\ddot{\theta} < g$는 $a^2(m - M\sin\theta) < I + (M+m)a^2$, 즉 $-Ma^2\sin\theta < I + Ma^2$와 동치이고, 이는 항상 참이다. 따라서 운동하는 내내 $T > 0$이고, 에너지 방정식은 모든 θ에 대해 성립한다.

결코 멈추지 않음

처음에 $\ddot{\theta} = gam/(I + (M+m)a^2) > 0$이므로, 원기둥은 실제로 우리가 정한 방향으로 돌기 시작한다. ω는 연속이므로 0을 지나야만 부호가 바뀔 수 있다. 따라서 모든 $\theta > 0$에 대

해 $\omega^2 > 0$이면 원기둥은 영원히 계속 돈다. $k = m/M$이라 하면, ω^2의 식으로부터 이는 정확히 다음 조건이 성립할 때 일어난다.

$$k\theta > 1 - \cos\theta \quad \text{모든} \theta > 0, \qquad \text{즉} \qquad k > h(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad \text{모든} \theta > 0.$$

그러므로 $\theta > 0$에서 h의 최댓값을 구해야 한다.

정류점(stationary point).

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

이다. $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$와 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$를 이용하면

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

이다. $0 < \theta < \pi$에서 $\sin\frac{1}{2}\theta$와 $\cos\frac{1}{2}\theta$는 모두 양수이므로, $h'(\theta)$의 부호는 $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$의 부호와 같다. $u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$라 하자. 그러면 $u(0) = 0$이고, $u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$은 0 근처에서 음수이며, $u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$이므로 u는 $[0,\pi)$에서 볼록(convex)하다. u는 0 아래로 내려갔다가 $\theta \to \pi$일 때 $+\infty$로 발산한다. 볼록함수는 0과 많아야 두 번 만나므로, u는 $(0,\pi)$에서 정확히 하나의 영점을 가지며, 그것이 α이다. 따라서 h는 $(0,\alpha)$에서 증가하고 (α,π)에서 감소한다.

생각해 보기 최댓값에서 h의 값은 무엇이며, 더 큰 θ에서는 어떠한가?

$\theta = \alpha$에서 h'의 분자가 0이 되므로 $1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$이고, 따라서

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

이다. $\pi \le \theta \le 2\pi$에서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$이고 $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$이므로 $\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$이고 $h' \le 0$이다. 즉 h는 2π까지 계속 감소하므로, $(\alpha, 2\pi]$에서 $h < \sin\alpha$이다. $\theta > 2\pi$에서는 $h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$이다. 끝으로 $u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$이고 $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$이므로 $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$이고, 따라서 $\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$이다. 그러므로 $\sin\alpha$는 $\theta > 0$에서 h의 최댓값이며, 이 값은 $\theta = \alpha$에서만 얻어진다.

결론. $m/M > \sin\alpha$이면 모든 $\theta > 0$에 대해

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

이므로 모든 $\theta > 0$에 대해 $\omega^2 > 0$이고, 원기둥은 멈추지 않고 회전한다. 이로써 증명이 끝났다.

(역으로, $m/M < \sin\alpha$이면 $\theta = \alpha$에서 $\omega^2 < 0$이므로 ω는 그 전에 0에 도달하고, 원기둥은 멈추었다가 되돌아간다. 경계인 $m/M = \sin\alpha$의 경우, 계는 평형 위치(equilibrium position) $\theta = \alpha$를 향해 아주 천천히 다가가지만 결코 그 위치에 완전히 도달하지는 않는다.)

검산

- $M = 0$이면 식은 $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$가 되는데, 이는 도르래에서 줄이 풀리며 내려가는 질량에 대한 표준적인 결과이다. 각가속도(angular acceleration)가 일정할 때처럼 ω^2이 선형으로 증가한다.
- 이분법(bisection)으로 $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$를 풀면 $\alpha \approx 2.3311$(약 133.6°)이고 $\sin\alpha \approx 0.7246$이다. $0 < \theta < 100$에서 $(1 - \cos\theta)/\theta$를 수치적으로 탐색해도 같은 최댓값 0.7246을 얻는다.
- 임의의 I, a, M, m에 대해 운동 방정식(equation of motion)을 수치적으로 단계별로 계산하면 ω^2의 식이 재현되며, $m/M = 0.735$일 때는 원기둥이 결코 멈추지 않고 $m/M = 0.715$일 때는 멈춘다.

흔한 실수

- M이나 m의 운동 에너지를 빠뜨리는 실수. 둘 다 속력 $a\omega$로 움직이므로, 유효 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I + (M + m)a^2$이다.
- M의 높이를 잘못 구하는 실수. M은 $a\sin\theta$가 아니라 $a(1 - \cos\theta)$만큼 올라간다.
- h가 α에서 극댓값(local maximum)을 가진다는 것만 보이고, 그보다 큰 모든 θ에서 h가 더 작다는 것을 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

이것은 퍼텐셜(potential) 안에서의 1자유도(one degree of freedom) 운동이다. 즉 $\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$이고 $V(\theta) = Mga(1 - \cos\theta) - mga\theta$이며, 이는 기울어진 "빨래판(washboard)" 퍼텐셜이다. 정지 상태에서 출발할 때, 모든 $\theta > 0$에 대해 V가 출발점의 값보다 계속 작게 유지되는 경우에 정확히 운동이 끝없이 이어진다. 같은 그림이 물리학에서 구동 진자(driven pendulum)와 조셉슨 접합(Josephson junction)도 설명한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이러한 종류의 에너지 도표를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.