풀이

STEP III 2001, 문제 10

역학 • 상대 속도

> **STEP III 2001, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

핵심 아이디어

상대 속도(relative velocity)는 차이다. C에 대한 A의 상대 속도는 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$이다. 두 조건을 모두 내적(dot product)으로 쓰고 나면 모든 것을 중점 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$를 기준으로 재게 되고, 두 조건은 두 제곱의 차가 된다. 기하학적으로 읽으면 이 방정식들은 원과 직선을 나타내며, 속도가 두 개라는 개수도 바로 여기에서 나온다.

풀이

조건

배들을 바다의 수평면 위에서 움직이는 입자로 취급하므로, 모든 속도는 2차원 벡터이다. C에 대한 A와 B의 상대 속도는

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

이다. 크기가 같고 서로 수직이라는 것은

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad \text{그리고} \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

을 뜻한다.

두 방정식

다음과 같이 놓는다.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

그러면 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$이고 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$이므로

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

이다. 이제 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$를 이용하여 각 조건을 전개한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{d} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) = -4\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{d}.$$

따라서 수직 조건 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$은 정확히 $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{d}|^2$, 즉

$$\left|\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right|^2,$$

과 같고, 크기가 같다는 조건 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$는 정확히 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = 0$, 즉 (2를 곱하면)

$$\left(\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

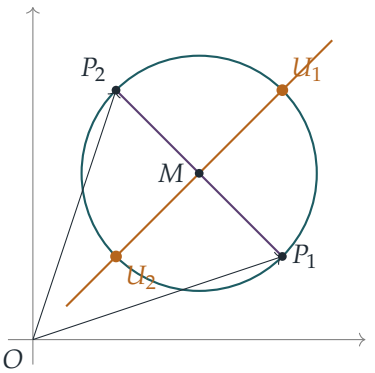
과 같다. 이것이 구하는 두 방정식이다. 위의 각 단계는 항등식이었으므로 논증을 거꾸로 따라갈 수도 있다. 즉 두 방정식이 성립하는 것은 두 조건이 성립할 **필요충분조건**(*if and only if*)이다.

C의 속도가 두 개인 이유

속도들을 공통의 원점에서 시작하는 위치 벡터로 그리고, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}$의 끝점을 각각 P_1, P_2, U라 하며, P_1P_2의 중점을 M이라 하자.

? **생각해 보기** 각 방정식은 점 U가 있을 수 있는 위치에 대해 무엇을 말해 주는가?

첫 번째 방정식은 U가 M으로부터 거리 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$에 있다는 것, 즉 P_1P_2를 지름으로 하는 원 위에 있다는 것을 말한다. 두 번째 방정식은 MU가 P_1P_2에 수직이라는 것(또는 $U = M$), 즉 U가 P_1P_2의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있다는 것을 말한다.



평면에서 반지름이 양수인 원의 중심을 지나는 직선은 그 원과 정확히 두 점, 곧 한 지름의 양 끝점에서 만난다. 반지름은 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$이고, 이 값은 바로 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$이기 때문에 양수이다. 따라서 C의 속도로 가능한 것은 정확히 두 개이다.

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \pm \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

여기서 $\mathbf{d}^{\perp}$는 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$를 직각만큼 회전시킨 벡터이다. ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$이면 원은 한 점 M으로 줄어들고, 이때 두 상대 속도가 모두 영벡터가 되므로 조건은 쓸모 있는 정보를 주지 못한다.) 그림에서 직각 P_1UP_2는 반원에 대한 원주각이며, U가 수직이등분선 위에 있으므로 $UP_1 = UP_2$이다.

마지막 부분

이제 $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = k$이고 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$이며, $k > 0$이다(수직이라는 개념은 영벡터가 아닌 벡터에 대해서만 의미가 있다). 그러면 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$는 서로 수직이고 영벡터가 아니므로 평면을 생성(span)하며, 따라서 $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$로 쓸 수 있다.

두 번째 방정식에 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$과 $|\mathbf{v}_1|^2 = |\mathbf{v}_2|^2$를 이용하면

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2\right) = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha k^2 - \beta k^2 = 0,$$

을 얻고, 그러므로 $\beta = \alpha$이다. 첫 번째 방정식은 전개하면

$$|\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

이다. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$이므로 $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$와 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$는 모두 $2k^2$와 같다. 따라서 이 두 항은 소거되고 $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$가 된다. $\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$를 대입하면 이 식은

$$2\alpha^2 k^2 = 2\alpha k^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

이 된다. 따라서 $\alpha = 0$이면 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$이고, $\alpha = 1$이면 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이다. 그러므로 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이면 요구한 대로 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이다.

이는 물리적으로도 타당하다. C가 정지해 있으면 상대 속도는 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$ 자신이고, 이들은 이미 조건을 만족한다. $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이면 상대 속도는 $-\mathbf{v}_2$와 $-\mathbf{v}_1$이고, 이들 역시 길이가 같고 서로 수직이다.

검산

그림에서처럼 $\mathbf{v}_1 = (3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,3)$으로 잡자. 공식에 따르면 $\mathbf{u} = (2,2) \pm (1,1)$, 즉 $(3,3)$ 또는 $(1,1)$이다. $\mathbf{u} = (3,3)$일 때 상대 속도는 $(0,-2)$와 $(-2,0)$이고, $(1,1)$일 때는 $(2,0)$과 $(0,2)$이다. 두 쌍 모두 길이가 같고 서로 수직이다. 컴퓨터로 무작위 쌍 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$를 10^4개 시험하여 두 항등식과 두 해를 확인했고, 길이가 같고 서로 수직인 무작위 쌍 10^3개에 대해서는 해가 정확히 $\mathbf{0}$과 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$임을 확인했다.

흔한 실수

- C에 대한 A의 상대 속도를 $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$로 쓰는 것. 이 문제의 조건에서는 부호가 영향을 주지 않지만, 대부분의 상대 속도 문제에서는 부호가 중요하다.
- 속도가 **정확히** 두 개인 이유를 말하지 않는 것. 이 개수는 평면에서 다룬다는 점(3차원에서는 해가 원 전체를 이룬다)과 반지름이 0이 아니라는 점에 달려 있다.

STEP 너머

$\mathbf{u}$에서 $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$로 옮겨 가는 것은 기준계(reference frame)의 변환이며, 모든 속도를 같은 벡터만큼 평행이동해도 상대 속도가 변하지 않는다는 사실은 고전역학의 출발점인 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)이다. 여기서 사용한, 속도를 점으로 그리는 "속도 그림" 관점은 충돌 문제와 추격 문제도 기하 문제로 바꾸어 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 기준계를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.