풀이

STEP III 2001, 문제 1

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q1

핵심 아이디어

함수 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$는 $\sinh^{-1} x$이고, 그 도함수(derivative)는 함수 자체보다 훨씬 간단하다. 이 도함수를 제곱하면 제곱근이 없는 관계식 $(x^2+1)(y')^2 = 1$을 얻고, 이를 미분하면 점화식(recurrence)의 $n = 0$인 경우가 나온다. 한 번 더 미분할 때마다 점화식이 한 단계씩 올라가는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. $x = 0$에서는 x 항이 사라져서 점화식이 $y^{(n+2)}(0)$을 곧바로 $y^{(n)}(0)$과 연결하므로, 매클로린(Maclaurin) 계수가 거의 공짜로 모두 얻어진다.

풀이

도함수

$s = \sqrt{x^2+1}$로 놓으면 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$이다. $s > \sqrt{x^2} = |x|$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x + s > 0$이고, 따라서 로그는 어디서나 정의된다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

귀납법

$P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{모든 실수} x.$$

기저 단계(*base case*), $n = 0$. $(x^2+1)y'' + xy' = 0$을 보여야 한다. 앞부분에서 $(x^2+$

$1)(y')^2 = 1$이다. 이를 x에 대하여 미분하면

$$2x(y')^2 + (x^2+1)\cdot 2y'y'' = 0.$$

$y' = 1/\sqrt{x^2+1}$은 결코 0이 아니므로 $2y'$으로 나눌 수 있고, 그러면 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$을 얻는다. 이것이 $P(0)$이다. (또는 $y' = (x^2+1)^{-1/2}$을 직접 미분해도 된다. $y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$이므로 $(x^2+1)y'' = -x(x^2+1)^{-1/2} = -xy'$이다.)

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 0$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자.

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+1)} + k^2\,y^{(k)} = 0.$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립하므로 미분할 수 있다. 처음 두 항에 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$2x\,y^{(k+2)} + (x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+1)\,y^{(k+1)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+2)} + k^2\,y^{(k+1)} = 0.$$

항을 정리하면

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+3)\,x\,y^{(k+2)} + (k^2+2k+1)\,y^{(k+1)} = 0,$$

이고, $2k+3 = 2(k+1)+1$이며 $k^2+2k+1 = (k+1)^2$이므로 이것은 정확히 $P(k+1)$이다.

> ? **생각해 보기** $y^{(k+2)}$의 계수는 왜 정확히 2만큼 커질까?

첫째 항에서 (x^2+1)을 미분하면 $2x\,y^{(k+2)}$가 나오고, 이것이 둘째 항에서 나온 $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$와 합쳐진다. 마찬가지로 둘째 항의 x를 미분해서 나온 $(2k+1)$이 k^2과 합쳐지는데, k^2+2k+1은 완전제곱식이다. 이 점화식은 자기 자신을 재생산하도록 만들어져 있는 것이다.

$P(0)$이 성립하고 모든 $k \geq 0$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 0$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

매클로린 급수

$P(n)$에 $x = 0$을 대입한다. 가운데 항이 사라지고 다음 식이 남는다.

$$y^{(n+2)}(0) = -n^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

출발값이 두 개 필요하다. $y(0) = \ln(0+1) = 0$이고 $y'(0) = 1/\sqrt{1} = 1$이다.

짝수 계 도함수. $y(0) = 0$에서 출발하면 점화식에 의하여 $y''(0) = 0$, 이어서 $y^{(4)}(0) = 0$ 등이 된다. 즉 짝수 계 도함수는 모두 0에서 값이 0이다. (이는 y가 기함수(odd function)라는

사실에서도 나온다. $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$이므로 $y(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$이기 때문이다.)

홀수 계 도함수. $y'(0)=1$에서 출발하면

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -1^2\cdot y'(0) = -1,\\ y^{(5)}(0) &= -3^2\cdot y'''(0) = 9,\\ y^{(7)}(0) &= -5^2\cdot y^{(5)}(0) = -225. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $y'''(0)$에서 $y^{(5)}(0)$을 얻으려면 n의 값은 얼마여야 할까?

$n+2=5$인 $y^{(n+2)}$를 얻으려면 $n=3$이어야 하므로, 곱하는 수는 -5^2이 아니라 $-3^2=-9$이다. 곱하는 수에는 **낮은** 쪽 도함수의 계수가 쓰인다.

따라서 매클로린 급수 $y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$는

$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

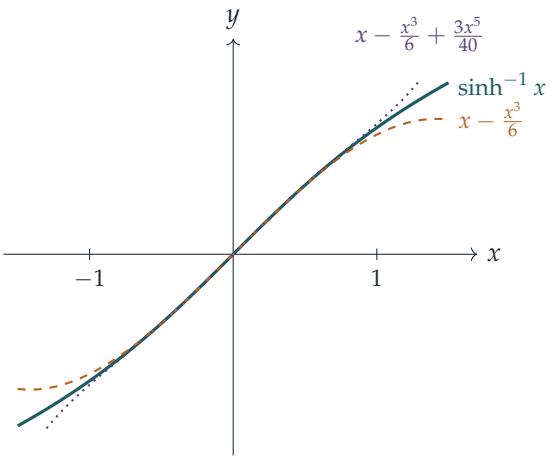
이고, 요구한 대로 시작하며, o이 아닌 그다음 항은

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

이다.

다른 방법. 이항급수(binomial series) $(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$를 항별로 적분하고($|x|<1$에서 유효하다) $y(0)=0$을 이용하면 $x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$를 얻으며, 결과가 일치한다.

아래 그림은 부분합(partial sum)이 원점 근처에서는 $y=\sinh^{-1}x$에 바짝 붙어 있다가, 더 멀리 가면 번갈아 위로 넘치고 아래로 처지는 모습을 보여 준다.



검산

- $x = 0.1$에 서 $\ln\left(0.1 + \sqrt{1.01}\right) = 0.0998340789$이 고, $x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} = 0.0998340789$로 역 시 같 다. 차 이 는 약 3×10^{-11}으 로, 그 다 음 (x^9) 항 의 크 기 정 도이다.
- $n = 0$인 경우는 $x = 1$에서 쉽게 확인할 수 있다. $y' = 1/\sqrt{2}$이고 $y'' = -1/(2\sqrt{2})$이므로 $2y'' + y' = 0$이다.
- 0에서 홀수 계 도함수의 값은 $1, -1, 9, -225$, 즉 $(-1)^m \left(1 \cdot 3 \cdots (2m-1)\right)^2$이다. 눈여겨 볼 만한 멋진 규칙이다.

흔한 실수

- $y^{(n+2)}(0) = -n^2 y^{(n)}(0)$에 서 n을 잘 못 써 서, 곱 하 는 수 를 $-1, -9, -25$ 대 신 $-9, -25, -49$로 얻는 것.
- $k!$로 나누는 것을 잊는 것. x^7의 계수는 -225가 아니라 $-225/5040$이다.
- 귀납 단계에서 $x^2 + 1$을 미분해서 나오는 $2x\, y^{(k+2)}$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

테일러(Taylor) 급수는 수렴하는 곳에서만 쓸모가 있는데, 이 급수는 $\sinh^{-1} x$가 실수 전체에서 완벽하게 매끄러운 함수인데도 정확히 $|x| \leq 1$에서만 수렴(converge)한다. 그 이유는 복소평면(complex plane)에 있다. $1/\sqrt{1+z^2}$은 원점에서 거리가 1인 $z = \pm\mathrm{i}$에서 발산하

며, 바로 이 거리가 수렴 반지름(radius of convergence)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 아름답게 설명한다. 테일러 정리와 그 나머지항에 관한 실변수 쪽의 이야기는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.