풀이

STEP II 2001, 문제 9

역학 • 속도의 제곱에 비례하는 공기 저항

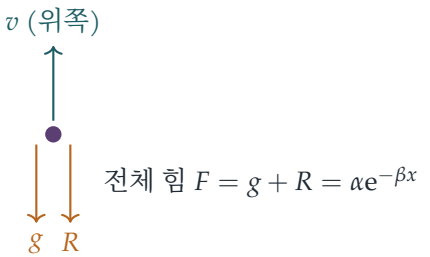
> **STEP II 2001, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q9

핵심 아이디어

힘이 시간이 아니라 **높이**의 함수로 주어져 있으므로, 자연스러운 도구는 일–에너지 원리(work–energy principle)이다. 올라가는 동안 F에 맞서 한 일은 정확히 잃어버린 운동 에너지(kinetic energy)와 같다. 이로써 $e^{-\beta x}$와 v^2가 연결되고, 그 결과 공기 저항(air resistance)이 속력에만 의존한다는 사실이 드러난다. 속력으로 표현된 저항 법칙을 알고 나면, 내려오는 운동은 v^2에 대한 표준적인 미분방정식(differential equation)이 된다.

풀이

모형. 입자의 질량은 단위 질량이고 연직선 위에서 움직인다. 올라가는 동안에는 중력과 공기 저항이 모두 운동과 반대 방향인 아래쪽으로 작용하므로, 전체 힘 F(크기 $\alpha e^{-\beta x}$)는 아래쪽으로 작용한다. 던진 점을 원점으로 하여 위쪽으로 x를 잡는다.



소모된 에너지

높이 x에 도달하는 데 소모된 에너지는 F에 맞서 한 일이다.

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big).$$

이 에너지는 입자의 운동 에너지에서 나오므로, 일–에너지 원리에 의해 (단위 질량)

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big). \qquad (*)$$

(같은 방법으로, 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha \mathrm{e}^{-\beta x}$의 꼴로 쓰고 $x=0, v=u$에서부터 적분해도 같은 식을 얻는다.)

속력으로 나타낸 힘

$(*)$에 β를 곱하고 정리하면

$$\alpha - \alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

> **생각해 보기** 왜 $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$이어야 할까? 문제의 어디에도 이를 강제하는 조건은 없어 보인다.

F를 두 부분으로 나누자. $F = g + R$이고, 여기서 R는 공기 저항이다. 그러면

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \Big(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\Big).$$

따라서 저항은 속력만의 함수로, v^2 항에 상수를 더한 꼴이다. 공기 저항은 공기 속을 움직이기 때문에 생기는 것이므로, 입자가 순간적으로 정지하는 최고점에서는 0이 되어야 한다. 그곳에서 $v=0$으로 놓으면 $R=0$이므로 $F=g$(중력만 작용)이고

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{즉,} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

결과적으로 상수항은 0이고, 저항 법칙은 단순히

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

(참고로, 최고점은 $\alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = g$인 곳으로, 그 높이는 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$이다.)

내려오는 운동

운동 방향에 관계없이 같은 저항 법칙 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$가 성립한다고 가정한다. 내려오는 동안 저항은 운동을 방해하므로 **위쪽**으로 작용하고, 중력은 여전히 아래쪽으로 작용한다. 최고점

에서 아래로 잰 거리를 y, 아래쪽 속력을 v라 하고, $y = 0$에서 $v = 0$이라 하자. 아래쪽을 양의 방향으로 하여 뉴턴의 운동 제2법칙(단위 질량)을 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$이므로 $w = v^2$로 놓으면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w = 0 \text{ (위치) } y = 0.$$

이것은 상수 계수 선형 미분방정식이다(또는 변수분리(separation of variables)를 해도 된다). 그 해는

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

이고, 실제로 $w(0) = 0$과 $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g - \beta w$를 만족한다. 따라서 최고점에서 아래로 거리 y인 곳에서의 공기 저항은

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

검산

$y \to \infty$일 때 $R \to g$이다. 즉, 입자는 저항과 중력이 평형을 이루는 종단 속력(terminal speed) $\sqrt{2g/\beta}$에 가까워진다. $y = 0$에서는 $R = 0$으로, 정지 상태에서 당연히 그래야 하는 값이다. 올라가는 동안, $x = 0$에서 공식은 $F = \alpha = g + \frac{1}{2}\beta u^2$를 주는데, 이는 중력에 속력 u에서의 저항을 더한 값이다. 수치적으로, $g = 9.8$, $\beta = 0.1$, $u = 20$(따라서 $\alpha = 29.8$)으로 놓고 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 운동 방정식을 단계별로 계산하면, 올라갈 때는 $F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$, 내려올 때는 $R = g(1 - \mathrm{e}^{-\beta y})$가 약 10^{-12}의 오차 이내로 재현되고, 입자의 최고 높이는 ≈ 11.12로 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$와 일치한다.

흔한 실수

- F를 공기 저항만으로 여기는 것. F는 **전체** 힘이므로, R를 구하려면 중력을 빼야 한다.
- 내려올 때도 저항의 부호를 그대로 두는 것. 저항은 항상 운동을 방해하므로 이제는 위쪽으로 작용하고, 방정식은 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \frac{1}{2}\beta v^2$가 된다.
- 답을 v로, 또는 u와 α로 나타내는 것. 문제는 R를 y, g, β만으로 나타내기를 요구한다.

STEP 너머

이차 항력(quadratic drag) $R \propto v^2$는 공기 속에서 빠르게 움직이는 물체에 대한 현실적인 모형이며, 이 문제는 깔끔한 요령 하나를 보여 준다. 시간에 대한 v의 방정식은 선형이 아니지만, 거리에 대한 v^2의 방정식은 **선형**이라는 것이다. 대학 역학에서는 올라갔다 내려오는 문제가 비대칭적이라는 점도 다룬다. 입자는 u보다 작은 속력으로 출발점에 돌아오고, 내려오는 데 걸리는 시간이 올라가는 데 걸리는 시간보다 길다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 종단 속도를 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.