풀이

STEP II 2001, 문제 8

순수수학 • 주기함수와 상미분방정식

STEP II 2001, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q8

핵심 아이디어

주기(period)가 1인 함수는 길이가 1인 모든 구간에서 똑같은 모양이므로, 그러한 구간 위에서의 적분(integral)은 모두 같은 값이다. 따라서 x가 1만큼 증가할 때마다 F는 같은 양 $F(1)$만큼 증가한다. 마지막 소문항의 미분방정식(differential equation)은 1계 선형(first order linear) 방정식이므로, 적분인자(integrating factor)를 이용하면 그 해가 $-F(x)$의 지수함수로 나타나고, 나머지는 $F(1)$이 양수라는 사실에서 따라 나온다.

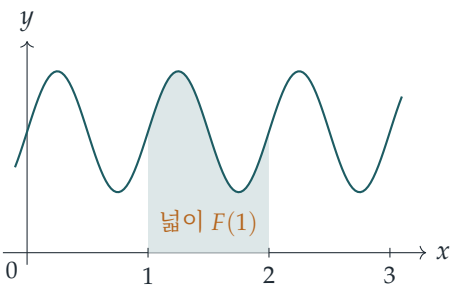
풀이

소문항 (i)

다음과 같이 잡자.

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

sin의 주기가 2π이므로 $\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$이고, 따라서 $f(x+1) = f(x)$이다. 또한 $\sin(2\pi x) \geq -1$이므로 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 1 > 0$이다. ($f(x) = 1$과 같은 상수함수도 조건을 만족하지만, 덜 흥미롭다.)



그래프 아래에 있는 폭이 1인 띠는 모두 넓이가 같다. 소문항 (ii)의 내용은 이것이 전부이다.

소문항 (ii)

$G(x) = F(x+1) - F(x)$로 정의하자. 첫째 항에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하여 미분하면, f의 주기성에 의해 모든 x에 대하여

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

이다. 따라서 G는 상수이고, $F(0) = 0$이므로 그 값은 $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$이다. 즉,

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{모든} x.$$

이제 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$일 때 $F(1) = 1 \cdot F(1)$은 자명하게 성립한다. 어떤 양의 정수 k에 대하여 $F(k) = kF(1)$이라 하면, 위 식에 $x = k$를 대입하여

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

을 얻는다. 따라서 모든 양의 정수 n에 대하여 $F(n) = nF(1)$이고, 이것이 보이려던 것이다.

(같은 내용을 다르게 말하면, f가 연속일 때 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$이고 $F(n)$은 $[k, k+1]$ 위의 적분 n개의 합인데, 치환 $t \mapsto t+k$를 하면 각 적분은 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$와 같다. 위의 논증은 F를 적분으로 나타낼 필요조차 없게 해 준다.)

소문항 (iii)

이 방정식은 y에 대하여 선형이고, 적분인자는 $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$이다. 바로 여기서 F가 등장한다. 실제로 곱의 미분법(product rule)과 $F' = f$에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

따라서 $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$는 상수이다. $x = 0$에서 그 값은 $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$이므로

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

소문항 (ii)에 의해, 각 양의 정수 n에 대하여

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

생각해 보기 $F(1) > 0$임을 어떻게 알 수 있을까? $F(1)$에 대해서는 직접 주어진 정보가 전혀 없다.

모든 x에 대하여 $F'(x) = f(x) > 0$이므로 F는 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 $F(1) > F(0) = 0$이다. (적분으로 생각하고 싶다면, $F(1)$은 0과 1 사이에서 양의 곡선 아래의 넓이이다.)

그러므로 $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$이고, $0 < r < 1$인 고정된 수 r에 대하여 $n \to \infty$일 때 $r^n \to 0$이다. 따라서 $n \to \infty$일 때 $y(n) \to 0$이며, 이것이 보여야 할 것이었다.

여기서는 정수에서만 이 사실을 주장했다는 점에 주목하자. 정수 사이에서 y는 조여진다. F가 증가하므로 y는 감소하고, 따라서 실제로는 x가 모든 실수값을 거쳐 $x \to \infty$일 때에도 $y(x) \to 0$이다.

검산

$f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$일 때, 사인함수는 한 주기 전체에서 적분하면 0이 되므로 $F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $F(2), F(3), F(5), F(7)$은 10^{-12}보다 작은 오차로 각각 $4, 6, 10, 14$이다. 미분방정식을 $y(0) = 1$에서 시작하여 수치적으로(4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 나가면 $y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$이고 $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$이어서 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$과 일치한다. 또한 덜 대칭적인 예 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$에 대해서도 정수가 아닌 x에서 $F(x+1) - F(x) = F(1)$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $[k, k+1]$ 위의 넓이가 $[0,1]$ 위의 넓이와 같은 이유를 보이지 않고, 주기성으로부터 $F(n) = nF(1)$이 "자명하다"고 쓰는 것. 함수 $G(x) = F(x+1) - F(x)$나 치환이 필요하다.
- $F(1) > 0$임을 정당화하는 것을 잊는 것. 이것이 없으면 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$은 1에 머물거나 한없이 커질 수도 있다.
- 적분인자의 부호를 잘못 잡아 $y = \mathrm{e}^{F(x)}$로 끝내는 것. 이 함수는 감소하지 않고 증가한다.

STEP 너머

이것은 **플로케 이론**(*Floquet theory*)의 가장 간단한 경우이다. 주기적인 계수를 갖는 선형 미분방정식에서 한 주기가 지난 뒤의 해는 처음 값에 고정된 인수(여기서는 $\mathrm{e}^{-F(1)}$)를 곱한 것이므로, 장기적인 거동은 그 인수가 1보다 작은지 큰지에 따라 결정된다. 수 대신 행렬(matrix)을 쓰면 같은 아이디어로, 받침점이 위아래로 흔들리는 진자의 안정성을 설명

할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 방정식과 적분인자를 충실하게 다루고 있어 다음 단계로 읽기에 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.