풀이

STEP II 2001, 문제 7

순수수학 • 복소수와 회전

STEP II 2001, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q7

핵심 아이디어

정다각형(regular polygon)의 둘레를 따라 걸으면 모든 변의 길이가 같고, 각 꼭짓점에서 똑같은 **외각**(exterior angle)만큼 방향을 튼다. 아르강 도표(Argand diagram)에서 각 θ만큼 도는 것은 $e^{i\theta}$를 곱하는 것이므로, 각 변은 바로 앞 변에 일정한 복소수를 곱한 것이다. 꼭짓점을 구하고 나면 중심은 수직이등분선(perpendicular bisector)에서 얻을 수 있고, 회전(rotation)은 $e^{i\theta}$를 한 번 더 곱하는 것일 뿐이다.

풀이

Q와 S 구하기

각 꼭짓점에서의 내각(interior angle)은 $5\pi/6$이므로, 각 꼭짓점에서 진행 방향은 외각 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$만큼 돈다. 다각형이 위쪽 반평면에 놓여 있고 O에서 P로 양의 실수축을 따라 출발하므로, 회전은 **반시계 방향**이어야 한다(P에서 시계 방향으로 돌면 Q가 실수축 아래로 내려간다).

$\omega = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$라 하자. 변 $\overrightarrow{OP}$는 복소수 2이고, 그다음 각 변은 바로 앞 변에 ω를 곱한 것이다 (길이는 같고 $\pi/6$만큼 돌아간다). 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + i,\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,i,\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2e^{i\pi/2} = 2i.\end{aligned}$$

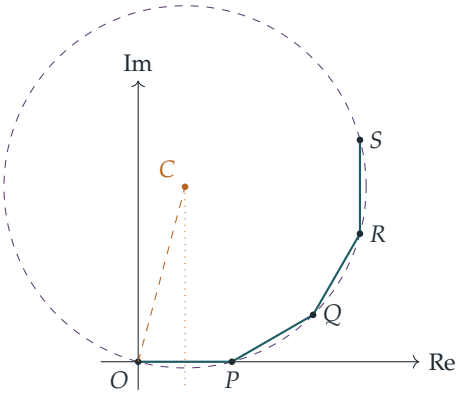
이를 차례로 더하면

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

첫째 줄이 구하는 Q의 값이고,

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$

이다.



중심 C

O, P, Q를 지나는 원은 정십이각형 전체의 외접원(circumcircle)이므로, C는 다각형의 중심이다. C는 O와 $P = 2$에서 같은 거리에 있으므로 수직이등분선 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 위에 있다. $C = 1 + h\mathrm{i}$라 하자. C는 O와 Q에서도 같은 거리에 있으므로

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

이다. 따라서 $h = 2 + \sqrt{3}$이고 $C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$이며, 이는 제1사분면에 있다.

생각해 보기 C의 편각은 정확히 얼마인가?

$\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$이어야 한다. 그런데

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

이고 C는 제1사분면에 있으므로 편각(argument)은 $\arg C = 5\pi/12$이다. (기하적으로 보면, 삼각형 OCP는 C에서의 꼭지각이 $2\pi/12$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로, 밑각은 $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$이다.)

회전

O를 중심으로 각 θ만큼 반시계 방향으로 회전하면 모든 점에 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 곱해지므로, C의 편각은 $5\pi/12 + \theta$가 된다. C가 실수축 위에 놓이려면 $5\pi/12 + \theta$가 π의 배수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 양수 θ는

$$\theta = \pi - \tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{7\pi}{12},$$

이고, 이때 C는 **음의** 실수축 위에 놓인다.

이제 S를 극형식(modulus–argument form)으로 나타내자. $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$이므로 $S = (3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$이다. S의 새 위치는

$$\begin{aligned} S' = S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12} &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} \\ &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}), \end{aligned}$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

검산

- $|C|^2 = 1 + (2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$이고 $|C-S|^2 = (2+\sqrt{3})^2 + 1$도 성립하므로, S는 실제로 같은 원 위에 있다.
- $|S'| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} = |S|$로, 회전이 보존해야 하는 성질을 만족한다.
- 수치로는 $S \approx 4.732 + 4.732\mathrm{i}$, $S' \approx -5.7956 + 3.3461\mathrm{i}$이다. 컴퓨터로 모든 변의 길이와 $5\pi/6$인 각들, 그리고 $7\pi/12$가 C를 실수축 위에 놓는 첫 번째 반시계 방향 각이라는 것을 확인하였다.

흔한 실수

- 외각 $\pi/6$ 대신 내각 $5\pi/6$만큼 방향을 트는 실수.
- $-5\pi/12$(시계 방향)나 $\pi/2 - 5\pi/12$만큼 회전하는 실수. 회전은 반시계 방향이고, C는 실수축의 음의 부분에서 처음으로 실수축과 만난다.

STEP 너머

$e^{i\theta}$를 곱하는 것을 회전으로 보는 것은 복소함수를 기하학적 변환으로 바라보는 출발점이다. $z \mapsto az + b$는 평면의 모든 회전, 확대(enlargement), 평행이동(translation)을 나타내며, 이들은 군(group)을 이룬다. 정다각형의 꼭짓점은 등비급수(geometric sum) $2(1 + \omega + \cdots + \omega^{k-1})$로 나타나며, 이는 1의 거듭제곱근(roots of unity)과 연결된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.