풀이

STEP II 2001, 문제 6

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2001, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q6

핵심 아이디어

복잡해 보이는 $\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$는 사실 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$가 모습을 바꾼 것일 뿐이다. 이것은 탄젠트의 뺄셈 공식(tangent subtraction formula)을 거꾸로 읽은 것이다. 이 점을 알아차리면 소문항 (i)은 부분적분(integration by parts) 한 번으로 처음의 적분에 정확히 도달한다. 소문항 (ii)는 관계가 없어 보이지만, 사상 $y = \frac{1-x}{1+x}$는 0과 1을 서로 맞바꾸고 자기 자신이 역함수(inverse)이므로, 이것으로 치환(substitution)하면 (ii)가 다시 (i)로 돌아간다.

풀이

처음의 적분

x^4을 $1 + x^2$으로 나누면(또는 $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$로 쓰면)

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

을 얻는다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (i)

$\theta = \tan^{-1} x$라 하면 $0 \le x \le 1$일 때 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$이다. 뺄셈 공식에 의해

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-x}{1+x}.$$

이다.

생각해 보기 $\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{1-x}{1+x}$라는 사실로부터 정말 $\tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})=\frac{\pi}{4}-\theta$라고 쓸 수 있을까?

$\frac{\pi}{4}-\theta$가 $\tan^{-1}$의 치역(range) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 속할 때에만 그렇다. 여기서는 $0\le\frac{\pi}{4}-\theta\le\frac{\pi}{4}$이므로 실제로 그러하며, 적분 구간 전체에서

$$\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x.$$

가 성립한다.

그러므로

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-J,$$

이고, 여기서 $J=\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$이다. $u=\tan^{-1}x$, $\mathrm{d}v=x^3\,\mathrm{d}x$로 두고(따라서 $v=\frac{1}{4}x^4$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$) 부분적분하면

$$\begin{aligned}J&=\Big[\tfrac{1}{4}x^4\tan^{-1}x\Big]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

이다. 여기서 처음의 결과를 이용하였다. 따라서

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}.$$

이다.

소문항 (ii)

생각해 보기 $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$라는 이상한 가중치는 어디서 온 것일까?

이것은 같은 변환 아래에서 $x^3\,\mathrm{d}x$가 바뀐 모습이다. $y=\frac{1-x}{1+x}$로 치환하자. 이를 풀면 $x=\frac{1-y}{1+y}$이다. 즉 이 사상은 자기 자신이 역함수이며, $x=0$을 $y=1$로, $x=1$을 $y=0$으로 보낸다. 그러면

$$1-y=\frac{2x}{1+x},\qquad 1+y=\frac{2}{1+x},\qquad \mathrm{d}y=-\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

이므로

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y=\frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\Big(-\frac{2}{(1+x)^2}\Big)\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

이고 $\tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$이다. 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것으로 흡수된다(y가 0에서 1까지이면 x는 1에서 0까지이다).

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{(1+y)^5} \tan^{-1} y \, \mathrm{d}y = \int_1^0 \left(-\frac{x^3}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{12}$$

이며, 마지막 단계에서 소문항 (i)의 결과를 이용하였다.

검산

- 두 답은 모두 양수이며, 반드시 그래야 한다(각 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$에서 음이 아니다): $\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6} \approx 0.02968$, $\frac{\pi}{32} - \frac{1}{12} \approx 0.01484$. 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 12자리까지 일치한다.
- (ii)의 답은 정확히 (i)의 답의 절반이며, 이는 대수적 계산을 하기 전에 수치적으로 먼저 확인해 볼 수 있다.
- 항등식에 $x = 0$을 대입하면 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$이고, $x = 1$을 대입하면 $\tan^{-1} 0 = 0$이다. 둘 다 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$와 일치한다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}y$를 빠뜨리거나 부호를 잘못 처리하는 것. 인수 $-\frac{2}{(1+x)^2}$의 음의 부호와 위끝·아래끝을 바꾼 데서 생기는 음의 부호가 서로 상쇄된다.
- 치역을 확인하지 않고 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$라고 쓰는 것. $x < -1$이면 이 식은 성립하지 않는다(π만큼 차이가 난다).

STEP 너머

치환 $y = \frac{1-x}{1+x}$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation), 즉 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상이다. 이러한 사상들은 합성(composition)에 대하여 군(group)을 이루며, 이 사상은 위수(order)가 2이다. 같은 기법에 대칭성을 결합하면 유명한 결과 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2$를 얻을 수 있는데, 다음에 꼭 도전해 볼 만하다. 뫼비우스 사상은 복소해석학(complex analysis)에서 핵심적인 역할을 한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 사상들을 아름다운 기하학적 관점으로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.