풀이

STEP II 2001, 문제 5

순수수학 • 정류점과 적분

> **STEP II 2001, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q5

핵심 아이디어

정상점(stationary point)은 기울기(gradient)에서 곧바로 얻어진다. 정상점은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$인 곳에 있고, 그 종류는 기울기의 부호가 어떻게 바뀌는지로 결정된다. 지수 인수는 항상 양수이므로 그 부호는 다항식 인수 $x(1-x^2)$에만 의존하며, 이 인수는 두 곡선에서 똑같다. 높이를 구할 때, 첫 번째 기울기는 정확히 적분된다($u = x^2$를 알아차리면 된다). 두 번째 기울기는 그렇지 않지만, 그 값이 필요한 것이 아니라 두 적분의 비교만 하면 된다.

풀이

곡선 C_1

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$이므로, 기울기가 0이 되는 것은 정확히 $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$일 때, 즉 $x = -1, 0, 1$에서이다. 또한 기울기는 $x(1-x)(1+x)$와 부호가 같다.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 부호	$+$	$-$	$+$	$-$

$x = 0$에서 기울기가 음에서 양으로 바뀌므로, (곡선 위에 있는) 원점은 극소(minimum)이다. $x = 1$에서는 양에서 음으로 바뀌므로 이 점은 극대(maximum)이다. 마찬가지로 $x = -1$도 극대이다.

높이를 구하기 위해 적분한다. 곡선이 원점을 지나므로

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

? **생각해 보기** $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$을 어떻게 적분할까?

t^2의 함수 옆에 인수 t가 붙어 있으므로 $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$로 치환(substitution)하는 것을 떠올릴 수 있다.

$$y = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} (1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

이제 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u\mathrm{e}^{-u}) = \mathrm{e}^{-u} - u\mathrm{e}^{-u} = (1-u)\mathrm{e}^{-u}$임에 주목한다(부분적분(integration by parts)으로도 같은 결과를 얻는다). 따라서

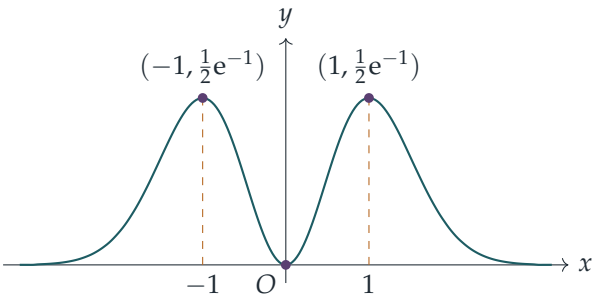
$$y = \tfrac{1}{2}\Big[u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^{x^2} = \tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$x = 1$에서 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이므로, 요구한 대로 극대점은 $(1, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1})$이다. y는 x에 대한 우함수(even function)이므로, 나머지 정상점은 극대점

$$(-1, \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}).$$

이다.

개형. $y = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$로부터 다음을 알 수 있다. 곡선은 y축에 대하여 대칭이고, $y \geq 0$이며 등호는 원점에서만 성립하고, 지수함수가 x^2의 증가보다 빠르게 감소하므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to 0$이다. 따라서 곡선은 "두 개의 봉우리" 모양이다. 원점에서 x축에 접하고, $x = \pm 1$에서 같은 높이(높이 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.18$)의 두 극대까지 올라간 다음, 양쪽에서 x축을 향해 잦아든다. (아래 그림은 세로 방향을 과장하여 그렸다.)



곡선 C_2

이번에도 모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^3} > 0$이므로, 기울기는 정확히 $x = -1, 0, 1$에서 0이 되고 $x(1-x)(1+x)$와 부호가 같으며, 따라서 앞과 똑같은 부호표를 얻는다. 그러므로 (가정에 의해 곡선 위에 있는) 원점은 극소이고, $x = 1$인 정상점은 극대이다. ($x = -1$인 점도 극대이지만, 문제에서 묻지는 않았다.)

그 높이는

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

이다. 이 적분은 초등함수로 된 원시함수(antiderivative)가 없으므로, 그 대신 값이 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$임을 이미 아는 C_1의 적분과 비교한다.

? **생각해 보기** k의 값을 구하지 않고 어떻게 k를 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$과 비교할 수 있을까?

피적분함수(integrand)를 비교한다. $0 < x < 1$이면 $x^3 < x^2$이다($x < 1$의 양변에 $x^2 > 0$을 곱한다). 따라서 $-x^3 > -x^2$이고, e^t는 증가함수이므로 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$이다. 또한 이 구간에서 $x(1-x^2) > 0$이므로, 곱해도 부등식의 방향은 유지된다.

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{단, } 0 < x < 1.$$

두 피적분함수는 모두 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간에서 부등식이 엄격하게 성립하므로, $[0,1]$에서 적분하면 엄격한 부등식을 얻는다.

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

여기서 마지막 등식은 앞에서 구한 $x = 1$에서의 C_1의 높이이다. 따라서 요구한 대로 극대점은 $(1,k)$이고 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이다.

검산

곱의 미분법(product rule)으로 $\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$을 미분하면 $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$이고, $x = 0$에서 그 값이 0이므로 C_1의 식은 옳다. 이계도함수(second derivative)로도 분류를 확인할 수 있다. 두 곡선 모두 $y''(0) = 1 > 0$이고 $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$이다. 수치적으로 계산하면(심프슨 공식(Simpson's rule)) $k \approx 0.2034$이고, $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$이다.

흔한 실수

- 적분 상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. "원점을 지난다"는 조건이 바로 적분 상수를 정해 주며, 이것이 높이에 영향을 준다.
- $x(1-x^2)$이 $(0,1)$에서 양수임을 언급하지 않고 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$이라는 이유만으로 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이라고 주장하는 것. 음수인 인수를 곱하면 부등식의 방향이 바뀐다.
- $x^3 < x^2$이 "모든 x에 대하여" 성립한다고 말하는 것. 이 부등식은 $x < 1, x \neq 0$일 때만 성립하며, 그래서 구간 $[0,1]$이 바로 우리에게 필요한 구간이다.

STEP 너머

두 번째 부분은 비교 논법(comparison argument)이다. 식으로 적을 수 없는 해에 대해, 식으로 적을 수 있는 해와 비교함으로써 무언가를 알아낸다. 이 아이디어는 미분방정식(differential equations) 이론 전반에 걸쳐 나타나는데, 그곳에서는 비교 정리(comparison theorems)가 다루기 힘든 방정식의 해를 더 간단한 방정식의 해로 어림한다. 또한 해석학(analysis)에서도 마찬가지인데, 그곳에서는 적분의 단조성(monotonicity)이 기본 도구이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 공식 없이도 해에 대해 정성적으로 얼마나 많은 것을 말할 수 있는지 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.