풀이

STEP II 2001, 문제 4

순수수학 • 배각 방정식

> **STEP II 2001, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q4

핵심 아이디어

f의 모든 항은 $\sin x$를 인수로 가진다. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$이고, 힌트는 $\sin 3x$에 대해서도 같은 일을 해 준다. $\sin x$를 묶어 내면 $\cos x$에 대한 이차식(quadratic)이 남고, P, Q, R에 대한 조건은 정확히 "이 이차식의 판별식(discriminant)이 음수이다"라는 뜻이다. 두 번째 부분은 같은 함수에서 $P = 1$, $Q = 1$, $R = -1$로 두고 x를 $2nx$로 바꾼 것이다. 이번에는 이차식이 실제로 근을 가지며, 핵심은 허용된 범위의 위쪽 끝에 가장 가까운 근이 어느 것인지 찾는 데 있다.

풀이

첫 번째 결과

$c = \cos x$라 하자. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$와 주어진 $\sin 3x$에 대한 항등식(identity)을 쓰면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)). \end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{f}(x) = 0$일 필요충분조건은 $\sin x = 0$ 또는 $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$이다.

먼저 $R \neq 0$이다. $R = 0$이면 조건이 $Q^2 < 0$이 되어 불가능하기 때문이다. 따라서 괄호 안의 식은 c에 대한 진짜 이차식이고, 그 판별식은 가정에 의해

$$(2Q)^2 - 4\cdot 4R\,(P - R) = 4(Q^2 - 4R(P - R)) < 0$$

이다. 판별식이 음수인 실계수 이차식은 실근을 갖지 않으므로, 괄호 안의 식은 어떤 실수 c에 대해서도 0이 되지 않으며, 특히 $c = \cos x$일 때도 그렇다. 그러므로 $\mathrm{f}(x) = 0$이면 반드

시 $\sin x = 0$, 즉 정수 m에 대해 $x = m\pi$이다. 역으로 모든 $x = m\pi$는 f의 영점이므로, 이것들이 정확히 영점 전체이다. 이로써 증명이 끝난다.

g의 가장 큰 근

$y = 2nx$로 두자. 그러면 $g(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$이고, 이는 $P = 1$, $Q = 1$, $R = -1$일 때의 $f(y)$이다. 여기서 $Q^2 = 1$은 $4R(P - R) = -8$보다 작지 않으므로 첫 번째 결과는 적용되지 않고, 이차식은 실근을 가진다. $c = \cos y$라 하면 위의 인수분해(factorisation)로부터

$$g(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

따라서 $g(x) = 0$일 필요충분조건은

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad \text{또는} \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

$\cos y = 1$인 경우는 이미 $\sin y = 0$에 포함되어 있다. 따라서 y에 대한 근은

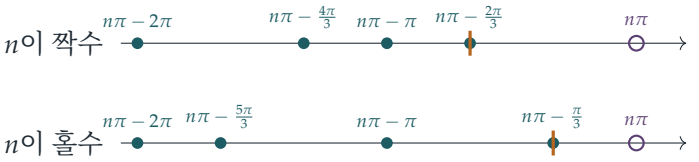
$$y = k\pi \quad \text{또는} \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

각 주기(period) $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ 안에서 근은 $2k\pi$에 0, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$을 더한 위치에 있다.

범위 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$는 $0 < y < n\pi$가 되고, 오른쪽 끝 $y = n\pi$는 그 자체로 근이지만 범위에서 제외된다. 따라서 $n\pi$보다 엄격히 작은 가장 큰 근을 구해야 하며, 중요한 것은 $n\pi$가 자기 주기 안에서 어디에 놓이는지뿐이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 n의 홀짝성(parity)이 중요할까?

근의 패턴은 π마다가 아니라 2π마다 반복된다. n이 짝수이면 $n\pi$는 2π의 배수이고, n이 홀수이면 $n\pi$는 π의 홀수배이다. 두 경우에 $n\pi$ 바로 아래에 있는 근들의 간격이 서로 다르다.



($n\pi$ 아래 마지막 2π 구간에서 y로 나타낸 g의 근을 축척에 맞게 그린 것이다. 빈 원은 제외된 끝점을, 호박색 눈금은 가장 큰 근을 나타낸다.)

n이 짝수인 경우. 이때 $k = \frac{n}{2} \geq 1$에 대해 $n\pi = 2k\pi$이고, 그 아래 마지막 주기에 있는 근들을 $n\pi$를 기준으로 나타내면

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

이 중 마지막 것은 $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$이며, 코사인 값이 $-\frac{1}{2}$이므로 근이다. 구간 $\left(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi\right)$에는 근이 없다. 그 안에는 π의 배수가 없고, $\cos y = -\frac{1}{2}$이려면 $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$여야 하는데, 여기서 y는 2π를 법으로 $\frac{4\pi}{3}$과 2π 사이에 엄격히 놓이기 때문이다. 또한 $n \geq 2$이므로 $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$이다. 따라서 가장 큰 근은 $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$에 해당하고,

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n\text{이 짝수}).$$

n이 홀수인 경우. 이때 $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$에 대해 $n\pi = 2k\pi + \pi$이다. $2k\pi = n\pi - \pi$에서 시작하는 주기 안에서 보면, $n\pi$ 아래의 근은 시작점으로부터 0과 $\frac{2\pi}{3}$만큼 떨어진 곳에 있으므로, 후보는 $n\pi - \pi$와 $n\pi - \frac{\pi}{3}$이다. 구간 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$은 2π를 법으로 y가 $\frac{2\pi}{3}$과 π 사이에 엄격히 놓이는 경우에 해당하며, 여기에는 근이 없다. 그리고 $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$이다. 따라서 가장 큰 근은 $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$에 해당하고,

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n\text{이 홀수}).$$

검산

$n = 1$일 때 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $g(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$이다. 공식은 $x = \frac{\pi}{3}$을 주고, 실제로 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$이다. $n = 2$일 때도 공식은 $\frac{\pi}{3}$을 준다($y = \frac{4\pi}{3}$). $n \to \infty$일 때 두 공식은 모두 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)하는데, 근들이 점점 촘촘해지므로 당연한 결과이다. $n = 1, \ldots, 12$에 대해 촘촘한 격자 위에서 g를 수치적으로 조사해 보았다. 예측한 각 값(예를 들어 $n = 3$일 때 $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$)은 근이었고, 그 값과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에서 g의 부호는 일정하게 유지되었다. 첫 번째 부분에 대해서는 $Q^2 < 4R(P-R)$을 만족하는 무작위 순서쌍 2000개 모두에서 괄호 안의 식이 $[-1, 1]$ 위에서 영점을 갖지 않았다.

흔한 실수

- $x = \frac{1}{2}\pi$ 자체를 답으로 내는 것. 이는 모든 n에 대해 g의 근이지만 열린구간(open interval) 밖에 있다.
- $\sin y = 0$에서 나오는 근을 잊고 $\cos y = -\frac{1}{2}$만 남기는 것. n이 짝수일 때 $y = n\pi - \pi$는 가장 큰 근은 아니지만 근이다.
- $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$로만 쓰고 $\frac{4\pi}{3}$ 계열을 빠뜨리는 것. 그러면 n이 짝수일 때 틀린 답이 나온다.

STEP 너머

이 인수분해가 가능한 이유는 $\sin mx / \sin x$가 항상 $\cos x$에 대한 다항식이기 때문이다. 이것이 바로 제2종 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials of the second kind) $U_{m-1}(\cos x)$이다. 따라서 유한한 사인 급수 $\sum a_m \sin mx$는 모두 $\sin x$와 $\cos x$에 대한 다항식의 곱이 되고, 그 영점의 개수를 세는 문제는 $[-1, 1]$에 있는 다항식의 근의 개수를 세는 문제로 바뀐다. 이 아이디어는 근사 이론(approximation theory)과 푸리에 해석(Fourier analysis)의 많은 부분의 바탕이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 e^{ix}를 통해 배각 공식(multiple-angle formulae)을 바라보는 아름다운 관점을 제시한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.