풀이

STEP II 2001, 문제 3

순수수학 • 유클리드 기하학

> **STEP II 2001, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q3

핵심 아이디어

직육면체(cuboid)를 한 꼭짓점이 원점에 오고 모서리가 좌표축을 따라 놓이도록 좌표 안에 놓는다. 그러면 모든 꼭짓점의 위치벡터(position vector)가 바로 보이고, 대각선(diagonal)은 이 벡터들의 차일 뿐이며, 두 대각선 사이의 각은 스칼라곱(scalar product)에서 곧바로 얻어진다. 부피(volume)와 겉넓이(surface area)의 비는 λ에 대한 간단한 유리함수(rational function)이고, 마지막 부분에서는 R에 대한 조건을 λ에 대한 조건으로 바꾸어 두 결과를 연결한다.

풀이

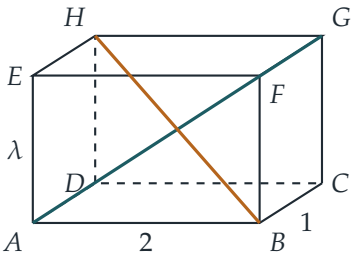
두 대각선 사이의 각

모서리 AE, BF, CG, DH가 면에 수직이므로 꼭짓점에서의 각은 모두 직각이다. 따라서 A를 원점으로 하고 AB, AD, AE 방향으로 좌표축을 잡을 수 있다.

$$A = (0,0,0), \quad B = (2,0,0), \quad C = (2,1,0), \quad D = (0,1,0),$$

윗면은 아랫면을 λ만큼 들어 올린 것이다.

$$E = (0,0,\lambda), \quad F = (2,0,\lambda), \quad G = (2,1,\lambda), \quad H = (0,1,\lambda).$$



두 대각선의 방향벡터(direction vector)는

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

이고, 길이는 각각 $\sqrt{5+\lambda^2}$이며,

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

이다. 이 두 벡터 사이의 각을 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5 + \lambda^2}.$$

이다.

? **생각해 보기** 절댓값(modulus) 기호는 어디에서 오는가?

교차하는 두 직선은 두 각 θ와 $\pi - \theta$를 이루고, 이 두 각의 코사인은 서로 부호만 반대이다. 예각(acute angle)(또는 $\lambda^2 = 3$일 때의 직각)은 코사인이 음이 아닌 쪽이므로

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3 - \lambda^2}{5 + \lambda^2}\right|,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

비 R

부피는 $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$이다. 겉넓이는 넓이가 각각 $2 \times 1, 2 \times \lambda, 1 \times \lambda$인 면이 두 개씩으로 이루어지므로 $2(2 + 3\lambda)$이다. 따라서

$$R = \frac{2\lambda}{2(2+3\lambda)} = \frac{\lambda}{2+3\lambda}.$$

이다. $\lambda > 0$이므로 분모는 양수이고,

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

인데, 이는 참이다. 따라서 가능한 모든 λ에 대하여 $R < \frac{1}{3}$이다. ($\lambda \to \infty$일 때 $R \to \frac{1}{3}$이므로 이 상계는 더 개선할 수 없다.)

마지막 부분

이번에도 $2+3\lambda > 0$이므로 양변에 곱할 수 있다.

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2+3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

그러므로 $\lambda \geq 2$라고 하자. 그러면 $\lambda^2 \geq 4 > 3$이므로 $\lambda^2 - 3 > 0$이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2-3}{\lambda^2+5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2+5}.$$

이렇게 쓰면 λ^2이 커질수록 $\cos\alpha$가 증가함을 알 수 있다. $\lambda^2 \geq 4$이면 $\lambda^2+5 \geq 9$이므로

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

이다. α와 $\arccos\frac{1}{9}$는 모두 코사인이 순감소하는 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 있으므로, $\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$로부터

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

를 얻고, 이것이 증명해야 할 것이었다. 등호는 정확히 $\lambda = 2$일 때, 즉 $R = \frac{1}{4}$일 때 성립한다.

검산

- $\lambda^2 = 3$이면 공식은 $\cos\alpha = 0$을 준다. 확인해 보면 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4+1+3 = 0$이므로 두 대각선은 실제로 수직이다.
- $\lambda \to \infty$이면 직육면체는 높고 가는 각기둥이 되고, 두 대각선은 거의 수직 방향이 되므로 $\alpha \to 0$이다. 공식도 당연히 $\cos\alpha \to 1$을 준다.
- $\lambda = 2$일 때: 부피는 4, 겉넓이는 $2(2+4+2) = 16$이므로 $R = \frac{1}{4}$이고, $\cos\alpha = \frac{1}{9}$이므로 $\alpha \approx 83.6^\circ$이다. λ의 무작위 값 10^5개에 대한 수치 검사로 각에 대한 공식, $R < \frac{1}{3}$, 그리고 $R \geq \frac{1}{4}$일 때마다 $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- 절댓값을 잊는 것: $\lambda^2 < 3$이면 벡터 $\overrightarrow{AG}$와 $\overrightarrow{BH}$는 둔각(obtuse angle)을 이루고, 예각은 그 보각(supplement)이다.
- 마지막 부등식의 방향을 잘못 잡는 것: 코사인은 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 감소하므로, 코사인이 **클수록** 각은 **작다**.

STEP 너머

물체를 좌표 안에 놓고 스칼라곱으로 각을 구하는 것은 벡터 기하학의 기본 도구이며, 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 과정에서는 이것이 임의의 차원에서의 내적(inner product)으로 일반화된다. 즉 $\mathbb{R}^n$에서 두 벡터 사이의 각은 $\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$로 정의되며, 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이 이 값이 $[-1,1]$에 있음을 보장한다. n차원 단위 정육면체의 긴 대각선이 각 모서리와 이루는 각의 코사인이 $1/\sqrt{n}$임을 보이는 것은 좋은 연습 문제이며, 따라서 n이 커질수록 이 각은 직각에 가까워진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.