풀이

STEP II 2001, 문제 2

순수수학 • 정수 부분의 합

> **STEP II 2001, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q2

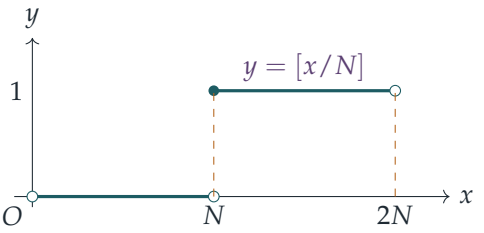
핵심 아이디어

복잡해 보이는 지수 $[k/N]$는 k가 1부터 $2N$까지 변할 때 단 세 가지 값만 가지며, 그래프를 그려 보면 그 값이 정확히 어디에서 뛰는지 알 수 있다. 이것을 알고 나면 부호 $(-1)^{[k/N]}$는 k의 세 구간 각각에서 일정하므로, 각 합은 구간마다 등차급수(arithmetic series)(소문항 (i)) 또는 등비급수(geometric series)(소문항 (ii))로 나뉜다. 주의할 점은 구간의 양 끝점뿐이다.

풀이

그래프 그리기

$0 < x < N$이면 $0 < x/N < 1$이므로 $[x/N] = 0$이다. $N \le x < 2N$이면 $1 \le x/N < 2$이므로 $[x/N] = 1$이다. 그래프는 계단 모양이다. 값이 뛰는 곳은 $x = N$이며, 이 점에서 함수는 이미 값 1을 가진다. 오른쪽 끝점 $x = 2N$은 포함되지 않는다(그 점에서의 값은 2가 된다).



채워진 점은 포함되는 점이고, 속이 빈 점은 제외되는 점이다.

합을 구하려면 정수 값 $k = 1, 2, \ldots, 2N$이 필요하다. 그래프에서 읽어 내고 끝점 $k = 2N$을 추가하면 다음과 같다.

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

따라서 $(-1)^{[k/N]}$는 $k \le N-1$일 때 $+1$, $N \le k \le 2N-1$일 때 -1이고, 하나뿐인 항 $k = 2N$에서는 다시 $+1$이다. ($N = 1$이면 첫 번째 구간은 비어 있다. 빈 합은 0이므로 아래의 모든 식은 그대로 성립한다.)

> **생각해 보기** 왜 처음 N개 항의 부호는 $+$이고 다음 N개 항의 부호는 $-$라고 간단히 말할 수 없을까?

값이 뛰는 곳이 정확히 N의 배수이기 때문이다. 항 $k = N$에서 이미 $[k/N] = 1$이고, 마지막 항 $k = 2N$에서는 $[k/N] = 2$이므로 이 항은 양수이다. 이 두 끝점을 제대로 처리하는 것이 이 문제의 전부이다.

소문항 (i)

세 구간으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \; - \sum_{k=N}^{2N-1} k \; + \; 2N.$$

첫 번째 합은 $\frac{1}{2}(N-1)N$이다. 두 번째 합은 N부터 $2N-1$까지 N개의 항으로 이루어져 있으므로, 첫째 항과 마지막 항의 평균에 N을 곱한 값 $\frac{1}{2}N(3N-1)$과 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}(N^2 - N) - \tfrac{1}{2}(3N^2 - N) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 나누면

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \; - \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \; + \; 2^{-2N}.$$

두 합 모두 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이다. $\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}(1-2^{-(b-a+1)})/\frac{1}{2} = 2^{1-a} - 2^{-b}$를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$
$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

$t = 2^{-N}$으로 놓으면 이 식은 $1 - 4t + 3t^2$이고, 다음과 같이 깔끔하게 인수분해된다.

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\left(1 - \frac{3}{2^N}\right).}$$

$N \to \infty$일 때 $2^{-N} \to 0$이고 $4^{-N} \to 0$이므로

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

이는 자연스러운 결과이다. N이 커지면 양수 구간 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$는 길어져 그 합이 1에 가까워지고, 음수 구간은 아주 뒤에서 시작하므로 그 합(대략 2^{1-N})은 무시할 수 있을 만큼 작아진다.

검산

- $N = 1$: 항은 $[1] = 1$인 $k = 1$과 $[2] = 2$인 $k = 2$이다. 소문항 (i)에서는 $-1 + 2 = 1 = 2 - 1$이고, 소문항 (ii)에서는 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$로 $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$와 일치한다.
- $N = 2$: $k = 1, 2, 3, 4$에 대한 부호는 $+, -, -, +$이다. 그러면 $1 - 2 - 3 + 4 = 0 = 4 - 4$이고, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$이다.
- 1부터 59까지의 모든 N에 대해 두 공식을 분수로 정확히 확인하였다. 예를 들어 $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$이다.

흔한 실수

- $k = N$을 양수 구간에 넣거나, 마지막 항 $k = 2N$의 지수가 2이므로 양수라는 사실을 잊는 것.
- $\sum_{k=N}^{2N-1}$의 항의 개수를 잘못 세는 것: 항은 $N - 1$개가 아니라 N개이다.

STEP 너머

정수 부분 함수, 즉 바닥 함수(floor function)는 정수론(number theory) 곳곳에 등장한다. 대표적인 예는 르장드르(Legendre)의 공식으로, 소수 p가 $n!$을 나누는 최고 거듭제곱의 지수가 $\sum_{j\geq 1}[n/p^j]$임을 말해 준다. 소문항 (ii)처럼 부호의 패턴이 구간 단위로 바뀌는 합은 급수의 항을 재배열하고 묶는 방법에 대한 부드러운 입문이기도 하며, 이는 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 다룬다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 바닥 함수가 활약하는 모습을 볼 수 있는 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.