풀이

STEP II 2001, 문제 11

역학 • 포물체 운동

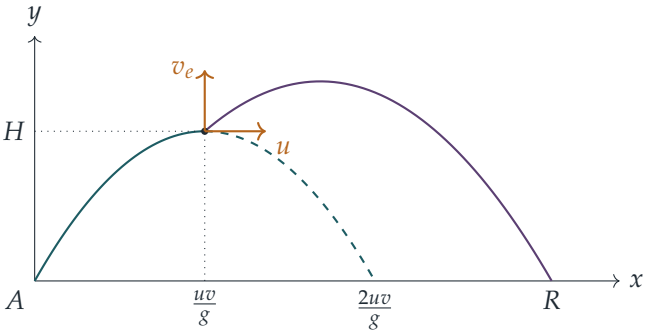
> **STEP II 2001, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q11

핵심 아이디어

비행을 폭발 시점에서 둘로 나눈다. 폭발 전에는 평범한 포물체(projectile)이고, 최고점은 연직 방향 속도가 0이 되는 곳이다. 폭발 후에는 조각 P가 그 높이에서 속도 (u, v_e)로 발사된 새로운 포물체이므로, 착지까지 걸리는 시간은 이차방정식(quadratic)에서 나온다. 두 번째 부분에서는 도달 거리(range)가 v_e의 증가함수(increasing function)이므로, "$R > D$"는 "v_e가 정확히 $R = D$가 되게 하는 값보다 크다"로 바뀐다.

풀이

미사일과 조각 P를 중력만 받아 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 지면은 수평이라고 한다. A를 원점으로, x를 수평 방향, y를 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



점선 곡선은 폭발이 없었다면 미사일이 따라갔을 경로이고, 보라색 곡선은 P의 경로이다.

P의 도달 거리

폭발까지. 연직 방향 속도는 $v - gt$이고, 이는 $t_1 = v/g$에서 0이 된다. 그 순간 미사일이 수평으로 이동한 거리는

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

이고, 높이는 나중 연직 속력이 0이라는 것과 $v^2 = 2gH$로부터

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

폭발 후. 조각 P는 높이 H에서 수평 속도 u, 위쪽으로 연직 속도 v_e를 가지고 출발한다. 시간 t를 폭발 순간부터 재면, 높이는

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$y = 0$일 때 착지한다.

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

이를 gt에 대한 이차방정식으로 보면

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

두 근의 곱이 $-v^2 < 0$이므로 한 근은 음수이다. 그 근은 포물선이 폭발 **이전**에 지면과 만났을 시각이므로 관계가 없다. 따라서 폭발 후의 비행 시간은

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

수평 속도는 내내 u로 유지되므로, 전체 수평 거리는

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

즉

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$R > D$가 되는 조건

다음과 같이 놓는다.

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

그러면 $R > D$는 $f(v_e) > k$와 동치이다. $D > 2uv/g$이므로 $gD > 2uv$이고, 따라서 $k > v > 0$이다.

? 생각해 보기 왜 $R = D$가 되게 하는 v_e의 값 하나만 찾으면 충분한가?

f가 순증가(strictly increasing)하기 때문이다.

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

여기서 $v \neq 0$이면 $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$임을 썼다. (물리적으로는 위로 더 세게 밀어 줄수록 P가 공중에 더 오래 머문다.) 따라서 $f(v_e^*) = k$이면, $f(v_e) > k$인 것은 정확히 $v_e > v_e^*$일 때이다.

v_e^*를 구하기 위해 $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$를 푼다. 양변을 제곱하면

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

제곱하면 거짓 근(false root)이 생길 수 있으므로 $k - v_e^* \geq 0$인지 확인한다. 실제로 $k - v_e^* = \dfrac{k^2 + v^2}{2k} > 0$이므로, v_e^*는 정말로 $f(v_e^*) = k$를 만족한다.

이제 k를 대입한다.

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

따라서

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

그러므로 f가 증가함수이므로

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

이면 $R > D$이고, 이것이 구하는 조건이다. 사실 위 논증은 이 조건이 필요조건(necessary condition)이기도 함을 보여 준다. $k > v$이므로 $v_e^* > 0$이고, 따라서 실제로 위쪽으로 밀어 주는 힘이 필요하다는 점에 주목하라.

검산

- $v_e = 0$이면 공식은 $gR/u = 2v$, 즉 $R = 2uv/g$를 준다. 이는 폭발하지 않은 포물체의 일반적인 도달 거리로, 마땅히 그래야 한다. 문제에서 $D > 2uv/g$를 가정하는 이유도 이것이다. 그렇지 않으면 밀어 줄 필요가 없기 때문이다.
- $u = v = 10$, $g = 10$, $D = 30$이면 경계값은 $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$이고, 이때 $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$이므로 정확히 $R = 30 = D$이다.
- 두 단계 비행을 수치적으로 한 단계씩 모의 실험한 결과는 도달 거리 공식과 약 10^{-9} 이내로 일치했고, 무작위 사례 10^5개에서 $R > D$인 것이 정확히 $v_e > v_e^*$일 때임을 확인했다.

흔한 실수

- 폭발 전에 이동한 수평 거리 uv/g를 빠뜨리고, R을 A가 아니라 폭발 지점 바로 아래 점부터 재는 것.
- 최고점에서 착지까지 걸리는 시간을 다시 v/g로 잡아, 새로 생긴 위쪽 속도 v_e를 무시하는 것.
- $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$를 제곱하면서 우변이 음이 아닌지 확인하지 않거나, 등식이 성립하는 값 하나가 왜 부등식으로 바뀌는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

폭발은 계 전체의 운동량(momentum)을 보존하므로, P는 원래 포물선을 따르지 않더라도 두 조각의 질량중심(centre of mass)은 원래 포물선을 따라 계속 움직인다. 내력은 질량중심의 운동을 바꿀 수 없다는 이 원리는 대학 1학년 역학 과목에서 로켓 운동과 충돌을 다루는 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 주제를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.