풀이

STEP II 2001, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 2001, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q10

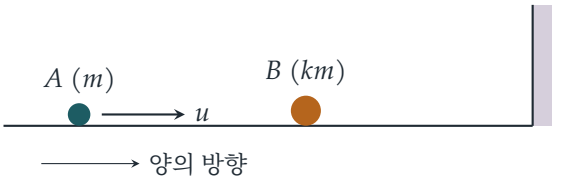
핵심 아이디어

이 문제는 두 번의 충돌과 한 번의 경주로 이루어져 있다. 첫 번째 충돌은 표준적인 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 다룬다. B가 벽에 부딪혀 튕겨 나온 뒤에 남는 질문은 단 하나, 되돌아오는 B가 A와 만날 수 있는가이다. 이는 벽을 향하는 A의 속도가 B의 속도보다 클 때, 그리고 그때에만 일어나며, 이 조건이 k에 대한 부등식이 된다. 에너지 부분에서는 운동 에너지(kinetic energy)를 k의 함수로 나타내고 $mu^2/27$과 비교한다. 이 비교는 결국 완전제곱식(perfect square)이 된다.

풀이

두 번째 충돌

A와 B를 매끄러운 면 위의 입자로 모형화하여, 수평 방향의 충격량(impulse)은 충돌에서만 생기도록 한다. A에서 벽을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 첫 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자.



첫 번째 충돌. 운동량은 보존되고, 멀어지는 속력은 다가가는 속력의 e_1배이다.

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

두 번째 식에 k를 곱하여 첫 번째 식에 더하면 $(1+k)v_B = (1+e_1)u$를 얻는다. 따라서

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

$v_B > 0$이므로 B는 계속 벽을 향해 움직인다. A는 $1-ke_1$의 부호에 따라 앞으로 움직이거나, 정지해 있거나, 뒤로 움직일 수 있다.

벽. B는 속력 v_B로 벽에 부딪혀 속력 $e_2 v_B$로 튕겨 나오므로, 속도는 $-e_2 v_B$가 된다. 그동안 A는 일정한 속도 v_A로 계속 움직인다. $v_A < v_B$이고(그 차이는 $e_1 u > 0$이다) A가 B보다 뒤에서 출발하므로, A가 먼저 벽에 닿을 수는 없다는 점에 유의하자.

> **생각해 보기** 튕겨 나온 뒤 A와 B는 같은 방향으로 움직이고 있을 수도 있다. 둘이 만나는지는 어떻게 판단할까?

튕겨 나온 뒤 B는 A와 벽 사이에 있고, 어느 입자에도 다른 힘은 작용하지 않는다. 따라서 둘 사이의 간격이 줄어들 필요충분조건은 A의 속도가 B의 속도보다 큰 것이다.

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

$v_A > 0$이면 둘은 서로를 향해 움직인다. $v_A \le 0$이면 B가 A를 뒤쫓는 것이고, B가 더 빠를 때에만 A를 따라잡는다. 하나의 부등식이 두 경우를 모두 포함한다. 대입하고 양수 $(1+k)/u$를 곱하면

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

를 얻는다. 마지막 단계에서는 $e_1 > 0$으로 나누었다. 따라서 이 부등식이 성립하면 두 번째 충돌이 일어나며, 이것이 보이려던 것이다. (등호가 성립하면 A와 B는 같은 속도로 움직여 결코 만나지 않는다.)

운동 에너지

$e_1 = \frac{1}{3}, e_2 = \frac{1}{2}$이면

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

B가 튕겨 나온 직후 A의 속력은 여전히 $|v_A|$이고 B의 속력은 $e_2 v_B$이다. 따라서 전체 운동 에너지는

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\left[(3-k)^2 + 4k\right] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

이제 공통분모 $54(1+k)^2$을 써서 $mu^2/27$과 비교한다.

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\left[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\right] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}(k^2-10k+25) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

생각해 보기 제곱은 결코 음수가 아닌데, $k<5$라는 조건은 무엇을 위한 것일까?

우변은 결코 음수가 아니며, $k=5$일 때에만 0이다. 따라서 $k<5$이면 $(k-5)^2>0$이고, 그러므로

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. 값 5는 우연이 아니다. 이 계수들로 첫 번째 부분의 경계를 계산하면 $(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3})/\frac{1}{3}=5$이다. 즉 $k<5$는 정확히 두 번째 충돌이 일어날 조건이다. $k=5$이면 튕겨 나온 뒤 두 입자가 모두 $-u/9$로 움직이고, 에너지는 정확히 $mu^2/27$이다.

검산

- $e_1=1$, $k=1$로 두자(질량이 같고 완전 탄성 충돌(perfectly elastic)인 경우). 그러면 $v_A=0$, $v_B=u$로, 익숙한 속도의 교환이 일어난다. 경계는 $k<1+2e_2$가 되며, $e_2>0$이기만 하면 $k=1$은 이를 만족한다. 즉 되돌아오는 B는 정지한 A와 반드시 충돌한다.
- $k=5$일 때 공식은 $v_A=-\frac{u}{9}$, $-e_2 v_B=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{9}=-\frac{u}{9}$를 주므로, 앞서 말한 대로 두 속도가 같다.
- 수치적으로, k를 0.001부터 4.999까지 정확한 분수로 계산하면 비 $T/(mu^2/27)$의 최솟값은 $k=5$ 근처에서 1.00000001이고, 항상 1보다 크다. (k, e_1, e_2)의 순서쌍 20 000개를 무작위로 시험했을 때, 부등식의 판정과 튕겨 나온 뒤의 속도를 직접 비교한 결과가 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- $v_A>0$을 요구하는 것. A는 뒤로 움직이면서도 B에게 따라잡힐 수 있다. 올바른 조건은 튕겨 나온 뒤의 두 속도를 비교하는 것이다.

- 벽이 B의 방향을 뒤집는다는 것을 잊는 것. B의 속도는 $e_2 v_B$가 아니라 $-e_2 v_B$가 된다.
- 에너지 계산에 벽에 부딪히기 전 B의 속력을 쓰는 것. 문제는 튕겨 나온 직후의 에너지를 묻고 있으므로, B의 속력은 $e_2 v_B$이다.

STEP 너머

뉴턴의 실험 법칙은 충돌하는 동안 짧고 격렬하게 일어나는 변형을 설명하는 하나의 모형이다. 반발 계수(coefficient of restitution)는 상대 운동 에너지 중 얼마만큼이 손실되는지를 요약한다. 대학 1학년 역학 강의에서는 충돌을 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 분석하는 경우가 많다. 이 좌표계에서 충돌은 단순히 상대 속도의 방향을 뒤집고 그 크기에 e를 곱하는 것이며, 손실되는 에너지는 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$이다. 여기서 μ는 환산 질량(reduced mass)이고 w는 다가가는 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.