풀이

STEP II 2001, 문제 1

순수수학 • 이항 근사

> **STEP II 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

핵심 아이디어

$(1-x)^{1/2}$의 이항급수(binomial series)는 x가 작을 때 빠르게 수렴(converge)하므로, 처음 몇 항만으로도 훌륭한 유리수 근삿값(rational approximation)을 얻는다. 요령은 x를 고르는 데 있다. $1-x$가 제곱수와 제곱근을 구하려는 수의 곱을 10의 거듭제곱으로 나눈 값이 되도록 해야 한다. 그러면 $1-x$의 제곱근은 구하려는 제곱근의 간단한 배수가 된다. $99 = 9 \times 11$이고 $9999 = 9 \times 1111$이므로 어떤 값을 고를지는 거의 저절로 정해진다.

풀이

이차 근사

$|x| < 1$일 때 성립하는 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

이다. 따라서 x가 작으면

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

이다. 오차(error)를 구할 때 필요한, 처음으로 버린 항 $-\frac{1}{16}x^3$도 함께 구했다. 사실 첫째 항 이후의 모든 항은 음수이다($n \geq 1$일 때 곱 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$에는 음수인 인수가 $n-1$개 있고, $(-x)^n$이 $(-1)^n$을 주므로 전체적으로 음의 부호가 하나 남는다). 그러므로 $0 < x < 1$일 때 이 이차식은 **과대추정**(*overestimate*)이다.

소문항 (i)

$x = \frac{1}{100}$으로 두면

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

이다. 이차 근사를 이용하면

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000 - 400 - 1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

> ? **생각해 보기** 처음으로 버린 항은 $-\frac{1}{16}x^3$이다. 이것이 $\sqrt{11}$의 오차인가?

꼭 그렇지는 않다. 이것은 $\sqrt{1-x}$에 대한 근삿값의 오차이고, 우리는 그 뒤에 $\frac{10}{3}$을 곱했다. 따라서 $\sqrt{11}$의 오차는 대략

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

이다. 그러므로 유효숫자(significant figure) 1자리로 나타내면 오차는 2×10^{-7}이고, $\frac{79\,599}{24\,000}$은 $\sqrt{11}$보다 조금 크다.

소문항 (ii)

소문항 (i)의 요령을 그대로 따른다. $1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$이므로 $x = \frac{1}{10\,000}$으로 두면

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1 - \frac{1}{20\,000} - \frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000 - 40\,000 - 1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 인수 3을 약분하였다(799 959 999의 각 자릿수의 합(digit sum)은 75이고, 이는 3으로 나누어떨어진다).

오차는 대략 처음으로 버린 항의 $\frac{100}{3}$배이다.

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

이는 문제에서 요구한 대로 약 2×10^{-12}이다. 따라서 알맞은 유리수는

$$\sqrt{1111} \approx \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000} \left(= \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

이다.

검산

- $79\,599/24\,000 = 3.316625$이고 $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$이다. 그 차는 2.096×10^{-7}으로 추정값 2.08×10^{-7}과 들어맞으며, 근삿값이 참값보다 크다는 것도 확인된다.
- $266\,653\,333/8\,000\,000 = 33.331666625$이고 $\sqrt{1111} = 33.33166662291\ldots$이다. 그 차를 높은 정밀도로 정확히 계산하면 2.0835×10^{-12}이다.
- 소문항 (ii)에서 추정이 더 정확해지는 까닭은, x가 작을수록 그다음에 버린 항 $-\frac{5}{128}x^4$이 x^3 항에 비해 상대적으로 더 작아지기 때문이다.

흔한 실수

- 버린 항에 $\frac{10}{3}$(또는 $\frac{100}{3}$)을 곱하는 것을 잊어서, 오차를 10배 또는 100배 작게 구하는 실수.
- x^2의 계수(coefficient)에서 부호를 틀리는 실수. $(-x)^2$이므로 이 항은 $+\frac{1}{8}x^2$이 아니라 $\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$이다.
- $1 - x$가 1111을 10의 거듭제곱으로 나눈 값이 되도록 x를 잡는 실수. 그런 값은 작지 않으므로 급수가 너무 느리게 수렴하여 쓸모가 없다.

STEP 너머

오차가 "처음으로 버린 항과 비슷하다"는 주장은 테일러 정리(Taylor's theorem)와 라그랑주 나머지항(Lagrange form of the remainder)으로 엄밀하게 만들 수 있다. 라그랑주 나머지항은 $(0, x)$ 안의 알 수 없는 한 점을 사용하여 오차를 정확한 식으로 나타낸다. 이로부터 단순한 추정이 아니라 확실한 상계와 하계를 얻을 수 있다. 이러한 오차 한계를 엄밀하게 다루는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.