풀이

STEP I 2001, 문제 9

역학 • 요격과 상대 속도

STEP I 2001, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q9

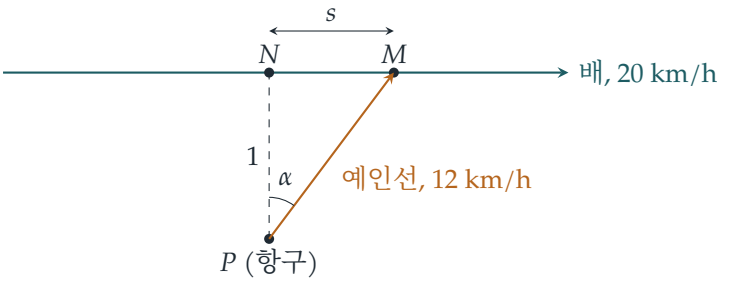
핵심 아이디어

가능한 한 늦게 출발하려면 예인선은 최고 속력으로 직선을 따라 가야 하므로, 실제로 선택할 수 있는 것은 배의 항로 위 어디에서 만나느냐뿐이다. 각각의 만남 지점에 대하여, 예인선이 제시간에 그곳에 도착할 수 있는 가장 늦은 출발 시각을 구한다. 그런 다음 만남 지점에 대하여 이 출발 시각을 최대화한다. 설정만 제대로 하면 변수가 하나인 최적화(optimisation) 문제가 된다.

풀이

설정하기

배와 예인선을 입자(particle)로 다룬다. 항구 P를 원점에 놓고, 배는 직선 $y = 1$을 따라 x축의 양의 방향으로 움직인다고 하자(거리의 단위는 km, 시간의 단위는 시간). P에서 항로에 내린 수선의 발은 $N = (0, 1)$이며, 이는 배가 항구에 가장 가까워지는 지점이다.



만남이 점 $M = (s, 1)$에서 이루어진다고 하자. 항로 위 배의 위치는 시간의 일차함수(linear

function)이므로, 배가 M에 도달하는 시각은

$$t_M = \frac{s-c}{20},$$

이다. 여기서 c는 배의 출발 위치에 따라 정해지는 상수이다. (배는 아직 다가오는 중이므로, c는 우리가 고려할 어떤 만남 위치보다도 작다.)

? 생각해 보기 예인선은 왜 최고 속력으로 직선을 따라 가야 하는가?

예인선이 시각 T에 출발하여 시각 t_M에 M에 있다면, 예인선은 시속 12 km 이하의 속력으로 적어도 직선거리 $PM = \sqrt{s^2+1}$만큼 이동한 것이므로 $t_M - T \geq \sqrt{s^2+1}/12$이다. 등호는 최고 속력으로 M을 향해 곧장 갈 때 성립한다. 더 느리거나 덜 곧게 가면 더 일찍 출발해야 한다.

따라서 M에서 만날 수 있는 가장 늦은 출발 시각은

$$T(s) = \frac{s-c}{20} - \frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

이고, 모든 s에 대하여 $T(s)$의 최댓값을 구하면 된다.

출발 시각 최대화하기

미분하면

$$T'(s) = \frac{1}{20} - \frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

$T'(s) = 0$으로 놓으면

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

이를 만족하려면 $s > 0$이어야 한다. 양변을 제곱하면 $25s^2 = 9(s^2+1)$이므로 $s^2 = \frac{9}{16}$이고 $s = \frac{3}{4}$이다.

이것은 극대이면서 전역 최대(global maximum)이다. $\sqrt{s^2+1}$은 볼록(convex)하므로, T(일차함수에서 볼록함수를 뺀 것)는 오목(concave)하다. 같은 말로, $\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$은 s에 대하여 증가하므로 $s < \frac{3}{4}$이면 $T'(s) > 0$이고 $s > \frac{3}{4}$이면 $T'(s) < 0$이다. 상수 c가 사라졌다는 점에 주목하자. 만남 지점은 배가 어디에서 출발했는지와 무관하다.

따라서 예인선은 N에서 $\frac{3}{4}$ km 더 나아간 곳에서 배를 만나며, 예인선이 이동하는 거리는

$$PM = \sqrt{\tfrac{9}{16}+1} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{PM = \tfrac{5}{4}\text{ km} = 1.25\text{ km}.}$$

이다. 예인선이 바다에 있는 시간은 $\frac{5/4}{12} = \frac{5}{48}$시간, 즉 $6\frac{1}{4}$분이다.

기하학적 해석

예인선의 진행 방향은 PN과 각 α를 이루며, $\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$이므로 $\sin\alpha$는 속력의 비 12/20과 같다. 예인선의 속도는 $(7.2, 9.6)$이고, 배에 대한 예인선의 상대 속도(relative velocity)는 $(7.2-20, 9.6) = (-12.8, 9.6)$이다. 두 벡터의 내적(dot product)은 $-92.16 + 92.16 = 0$이다. 임계 출발 시각에서 예인선의 속도는 배에 대한 상대 속도와 수직이다. 이는 더 느린 추격자가 간신히 가로채기에 성공하는 경우의 표준적인 조건이다.

검산

- 배의 출발 위치를 여러 가지로 바꾸어 가며 만남 지점을 촘촘한 격자 위에서 전수 탐색하면, $T(s)$의 최댓값은 언제나 $s = 0.75$에서 나타나므로 예인선의 이동 거리는 1.25 km이다.
- 가장 늦은 출발 시각부터 진행 방향 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$으로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 예인선은 배에 도달한다. 단 0.002시간만 늦게 출발해도, 어떤 방향으로 가든 배로부터 20 m 이내로 접근할 수 없다.
- 타당성 점검: 예인선이 배만큼 빠르다면 $\sin\alpha$는 1이 되고, 만남 지점은 무한히 멀어진다. 속력이 같은 예인선은 배를 한없이 쫓아갈 수 있으므로 이는 이치에 맞다.

흔한 실수

- 배가 가장 가까이 오는 지점 N에서 만나는 것(예인선의 이동 거리 1 km). 이것은 예인선의 **이동 거리**를 최소화할 뿐 출발 시각을 최대화하지 않는다. 조금 더 앞으로 나아가면 배가 그곳까지 항해해야 하므로 예인선은 시간을 번다.
- $s/20$ 항 없이 예인선의 이동 시간 $\sqrt{s^2+1}/12$만 최소화하는 것. 최대화해야 할 양은 출발 시각이며, 여기에는 두 배가 모두 관여한다.

STEP 너머

도착 시각의 차를 최대화하는 것은 최적 제어(optimal control) 문제 또는 추격 문제(pursuit problem)의 작은 예이다. 속력의 비 조건 $\sin\alpha = 12/20$은 초음속 항공기 뒤에 생기는 마하 원뿔(Mach cone)과 같은 기하학이다. 원뿔의 반각의 사인값은 항공기 속력에 대한 음속의 비이며, 여기서 느린 예인선은 빠른 음원을 쫓는 소리의 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도와 기준틀을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 역학에서의 STEP 스타일 최적화 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.