풀이

STEP I 2001, 문제 8

순수수학 • 2계 선형 방정식

> **STEP I 2001, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q8

핵심 아이디어

이미 알고 있는 해를 방정식에 대입하면, 각 x의 값에서 두 미지 함수 $p(x)$와 $q(x)$ 사이의 관계식이 하나씩 얻어진다. 해가 두 개이면 연립일차방정식(simultaneous linear equations)이 두 개 생기고, 이것을 두 수에 대한 연립방정식을 풀 때와 똑같이 풀어 p와 q를 구한다. 마지막 부분에서는 가운데 부분에서 증명한 선형성(linearity) 덕분에 주어진 두 해를 그 해들의 더 간단한 결합으로 바꿀 수 있고, 삼각함수 항등식(trigonometric identities)을 쓰면 그 결합이 아주 간단해진다.

풀이

p와 q 구하기

$y = x$이면 $y' = 1, y'' = 0$이므로 $(*)$에 대입하면

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

이다. $y = 1 - x^2$이면 $y' = -2x, y'' = -2$이므로

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

이다. (1)에서 $p(x) = -x\,q(x)$이다. 이것을 (2)에 대입하면

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

이다. $1 + x^2 > 0$이므로 양변을 나눌 수 있고, 따라서 $q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$이며, 이어서 (1)에서 $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다. ($x$로 나눈 적이 없으므로 이 결과는 $x = 0$을 포함한 모든 실수 x에 대해 성립한다.)

임의의 결합 $ax + b(1 - x^2)$도 해이다

$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$라 하자. 미분(differentiation)은 선형이므로, 상수 a, b에 대해 $y = ay_1 + by_2$이면

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + b(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

이다. $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x^2$으로 두면 $L[y_1]$과 $L[y_2]$는 모두 0이다(이것이 바로 두 함수가 $(*)$를 만족한다는 뜻이다). 따라서 모든 상수 a와 b에 대해 $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$이다. 직접 확인하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. $y = ax + b(1 - x^2)$이면 $y' = a - 2bx$, $y'' = -2b$이고

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2(ax + b - bx^2)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

이다.

마지막 부분

방금 한 논증에서는 특정한 p와 q에 대한 성질을 전혀 쓰지 않았다. 즉 $(*)$ 꼴의 어떤 방정식에 대해서도 두 해의 결합 $ay_1 + by_2$는 다시 해가 된다. 따라서 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$과 $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$이 모두 $(*)$를 만족하면 그 합과 차

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

도 $(*)$를 만족한다. 여기서는 $\theta = \frac{1}{2}x^2$으로 두고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$과 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$를 썼다.

> **생각해 보기** 주어진 함수 대신 1과 $\cos(x^2)$을 다루어도 괜찮은 이유는 무엇인가?

이 단계는 거꾸로도 갈 수 있기 때문이다. 주어진 함수는 $\frac{1}{2}(1 + \cos x^2)$과 $\frac{1}{2}(1 - \cos x^2)$이므로, p와 q가 이 두 함수를 모두 해로 만드는 것은 1과 $\cos(x^2)$을 모두 해로 만드는 것과 정확히 같다. 잃는 정보는 없고, 도함수 계산은 훨씬 쉬워진다.

해 $y = 1$. 이때 $y' = y'' = 0$이므로 $(*)$는 $q(x) \cdot 1 = 0$이 되고, 따라서

$$q(x) = 0.$$

이다.

해 $y = \cos(x^2)$. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $y' = -2x\sin(x^2)$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

이다. $q = 0$이므로 $(*)$는

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

이 된다. $x\sin(x^2) \neq 0$인 곳에서는 나눌 수 있으므로

$$p(x) = -\frac{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)} = -\frac{1}{x} - 2x\cot(x^2).$$

이다. 따라서 $p(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x\cot(x^2)$, $q(x) = 0$이다.

$x\sin(x^2) = 0$인 점(즉 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{n\pi}$)에서는 p의 계수가 0이 되므로, 그 점에서 방정식은 p에 대해 아무것도 알려 주지 않는다. 실제로 우리가 구한 p는 이 점들에서 발산한다. 이것은 계산 실수가 아니다. 이런 점에서는 주어진 두 함수의 도함수가 모두 0이므로, 두 함수가 $(*)$ 꼴의 잘 정의된 방정식의 두 "독립인" 해가 될 수 없고, 따라서 p는 그 점에서 특이(singular)해야 한다.

검산

- 첫 부분을 독립적으로 확인하는 방법으로, 두 해의 **론스키 행렬식**(Wronskian) $W = y_1y_2' - y_2y_1'$은 $W' = -pW$를 만족한다. $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x^2$이면 $W = -2x^2 - (1 - x^2) = -(1 + x^2)$이므로 $-p = W'/W = 2x/(1 + x^2)$이고, 이는 우리가 구한 p와 일치한다. 마지막 부분에서는 해 1과 $\cos(x^2)$으로부터 $W = -2x\sin(x^2)$을 얻고, 역시 $W'/W = 1/x + 2x\cot(x^2) = -p$이다.
- 수치적으로 확인하면, $x = 0.9$에서 주어진 두 함수를 유한 차분(finite differences)으로 계산한 도함수와 함께 $(*)$에 대입하면 $p(0.9) \approx -2.82465$, $q(0.9) \approx 0$이 나오며, 이는 $-1/0.9 - 1.8\cot(0.81) \approx -2.82465$와 일치한다.

흔한 실수

- $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$을 곧바로 두 번 미분하다가 식 계산에서 길을 잃는 것. 배각 공식(double-angle identities)을 먼저 쓰고 나서 미분하라.
- (1)을 x로 나누어 $q = -p/x$를 얻는 것. 이렇게 해도 되지만, 그러면 $x = 0$인 경우를 따로 다루어야 한다. 대신 p를 소거하면 이 문제를 피할 수 있다.
- 마지막 부분에서 p에 대한 식이 어디에서 성립하는지 밝히지 않는 것.

STEP 너머

이 문제는 이계 선형 미분방정식(second-order linear differential equations) 이론을 살짝 엿보게 해 준다. 해들은 이차원 벡터 공간(vector space)을 이루고, 독립인 해 두 개가 있으면 방정식이 결정되며, 론스키 행렬식(과 아벨(Abel)의 공식 $W' = -pW$)은 독립성을 재는 도구이다. 여기서의 $x = \pm\sqrt{n\pi}$처럼 론스키 행렬식이 0이 되는 점은 바로 계수가 특이해질 수밖에 없는 점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 모든 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.