풀이

STEP I 2001, 문제 7

순수수학 • 오목성과 미분방정식

STEP I 2001, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q7

핵심 아이디어

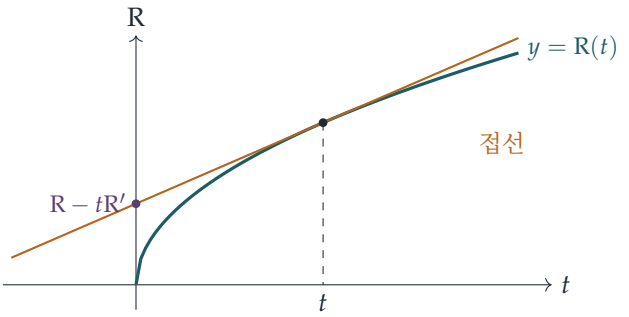
세 조건은 R이 원점에서 출발하여 증가하면서 아래쪽으로 휘어진다는 것, 즉 그 그래프가 오목(concave)하다는 뜻이다. 오목한 그래프는 자신의 모든 접선(tangent)보다 아래에 놓이며, 이 하나의 기하학적 사실이 (i)의 부등식(inequality)을 준다. $\mathrm{H} = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$는 $\ln \mathrm{R}$의 도함수(derivative)이므로, (ii)와 (iii)은 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 된다. R을 명시적으로 구하고 나면 이를 조건들에 대입하여 확인하며, (i)의 부등식은 어떤 모형을 빠르게 배제하는 방법을 제공한다.

풀이

먼저 풀이 전체에서 쓰는 사실이 하나 있다. $\mathrm{R}(0) = 0$이고 $t > 0$에서 R이 순증가하므로, $t > 0$일 때 $\mathrm{R}(t) > 0$이다. 따라서 $t > 0$에서 $\mathrm{H}(t)$가 정의되고 $\mathrm{H}(t) > 0$이다.

소문항 (i)

그래프는 원점을 지나고, 기울기가 양수이며, t가 증가함에 따라 기울기가 감소한다.



$t > 0$을 하나 고정하자. 시각 t에서 그래프에 그은 접선의 기울기는 $\mathrm{R}'(t)$이므로, 이 접선은 세로축과 다음 높이에서 만난다.

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

그림을 보면 원점을 지나는 곡선이 접선보다 아래에 있으므로 이 절편은 양수이다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 $[0, t]$에서 R에 평균값 정리(mean value theorem)를 적용하자. 그러면 $0 < c < t$인 어떤 c가 존재하여

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{이므로} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

$\mathrm{R}'' < 0$이므로 함수 R'은 순감소하고, $c < t$에서 $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$를 얻는다. 따라서

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

이고, 이것이 바로 접선의 절편이 원점보다 위에 있다는 명제이다. 양변을 $\mathrm{R}'(t) > 0$으로 나누면

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

이 되어 증명이 끝난다.

(같은 내용을 달리 말하면, 접선은 t축과 $t - 1/\mathrm{H}(t)$에서 만나며 이 값은 음수이다. 우주론(cosmology)에서 $1/\mathrm{H}$는 "허블 시간(Hubble time)"이며, 이 결과는 감속하는 모든 모형에서 우주의 나이가 허블 시간보다 짧다는 것을 말해 준다.)

소문항 (ii)

$t > 0$에서 $\mathrm{R} > 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

적분하면 $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$이므로

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

이다. 여기서 $k = \mathrm{e}^C > 0$이다.

이제 $k > 0$과 $t^a > 0$을 이용하여 조건들을 확인하자.

- $\mathrm{R}'(t) = ka\,t^{a-1}$이고, 이는 $a > 0$일 때 그리고 그때에만 $t > 0$에서 양수이다.
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)\,t^{a-2}$이다. $a > 0$일 때, 이는 $a < 1$일 때 그리고 그때에만 음수이다.
- $a > 0$이면 $t \to 0^+$일 때 $kt^a \to 0$이므로 $\mathrm{R}(0) = 0$과 모순이 없다. ($a \le 0$이면 어차피 성립하지 않는다. kt^a가 $k \neq 0$으로 가거나 발산하기 때문이다.)

따라서 조건 $(*)$가 성립할 필요충분조건은

$$0 < a < 1.$$

이다. 이는 소문항 (i)과도 일치한다. (i)에 따르면 $t < 1/\mathrm{H} = t/a$이고, 여기서 $a < 1$이어야 한다.

소문항 (iii)

이번에는 $\mathrm{H}(t) = b/t^2$이다. 먼저 (앞의 첫 관찰에서) $t > 0$일 때 $\mathrm{H}(t) > 0$이므로 $b > 0$이어야 한다. $b \le 0$이면 이미 끝난 것이다.

그러므로 $b > 0$이라 하자. 소문항 (i)에 의해 모든 $t > 0$이

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{즉,} \qquad t > b$$

를 만족해야 한다($t > 0$으로 나누고 $b > 0$을 곱했다). 그런데 이는 $0 < t \le b$인 모든 t에서 성립하지 않는다. 따라서 어떤 b의 값도 $(*)$와 양립할 수 없다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)을 이렇게 사용해도 정당한가?

그렇다. 소문항 (i)은 $(*)$를 만족하는 **모든** 함수가 모든 $t > 0$에 대하여 $t < 1/\mathrm{H}(t)$를 만족함을 증명했다. 그러므로 제시된 H가 단 하나의 t에서라도 이 부등식을 어기면, 그 H를 갖는 어떤 함수도 $(*)$를 만족할 수 없다. 이것은 귀류법(proof by contradiction)이다.

직접 확인하려면 (ii)에서처럼 방정식을 풀면 된다. $\ln \mathrm{R} = -b/t + C$이므로 $k > 0$에 대하여 $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$이다. 그러면

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$
$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}(b - 2t).$$

$b > 0$이면 $\mathrm{R}' > 0$이고 $t \to 0^+$일 때 $\mathrm{R}(t) \to 0$이므로 처음 두 조건은 성립한다. 그러나 $0 < t < b/2$에서 $\mathrm{R}''(t) > 0$이므로 원점 근처에서 그래프가 반대 방향으로 휘고, 따라서 $(*)$가 성립하지 않는다.

검산

- (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$로 두면 $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$가 되어 그림의 모양과 같다. 증가하고 오목하며, $t < 1/\mathrm{H} = 2t$이다. $a = 1$로 두면 원점을 지나는 직선이 되고, 이때는 정확히 $t = 1/\mathrm{H}$이다. 이것이 (i)의 경계 경우이다.
- (iii)에서 $b = 1, k = 1$로 두면 수치적으로 $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$이고, $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$이므로 둘 다 $(*)$를 어긴다.

컴퓨터로 여러 오목한 시험 함수에 대해 (i)을 확인했고, (ii)와 (iii)의 해와 도함수 공식을 유한 차분(finite differences)으로 확인했으며, $t = b/2$에서 R''의 부호가 바뀌는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (i)에서 그림만으로 논증하는 것. "곡선이 접선보다 아래에 있다"는 근거가 필요하다. 평균값 정리와 R'이 감소한다는 사실이 그 근거이다.
- (ii)에서 $\mathrm{R}' > 0$(그리고 $\mathrm{R}(0) = 0$)을 위해 $a > 0$이 필요하다는 것을 잊고 $a < 1$만 답하는 것.
- (iii)에서 t가 클 때 오목성이 깨진다고 주장하는 것. $b - 2t$의 부호를 보면 깨지는 곳은 작은 t이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 볼록함수와 오목함수에 관한 핵심적인 사실의 특수한 경우이다. 미분가능한 함수가 오목할 필요충분조건은 그 그래프가 모든 접선보다 아래에 놓이는 것이다. 이 사실은 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 최적화(optimisation)의 많은 부분의 바탕이 된다. 평균값 정리를 이용한 논증은 대학 1학년 해석학의 표준적인 내용이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. 실제 우주론에서 $a = \frac{2}{3}$은 물질이 지배하는 아인슈타인–드 지터(Einstein–de Sitter) 우주에 해당하며, 이 우주의 나이는 허블 시간의 3분의 2이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.