풀이

STEP I 2001, 문제 6

순수수학 • 회전면

> **STEP I 2001, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.8 절 **공 모양 빵 자르기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/spherical-loaf.html

핵심 아이디어

반원 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$를 x축 둘레로 회전시켜 구를 만든다. 겉넓이(surface area) 공식의 피적분함수(integrand) $y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$가 **상수**가 되므로, 어떤 조각이든 그 껍질의 넓이는 조각의 두께에만 의존하고 조각의 위치와는 무관하다. 두 번째 부분에서는 (힌트의 적분 구간 $-a$부터 $-a + t$까지가 암시하듯) 한쪽 끝에서부터 조각을 먹으므로, 남는 부분은 구관(spherical cap)이다. 이때 비 V/A는 구관 두께에 대한 이차식이 되고, 그 최댓값을 구하면 된다.

풀이

껍질의 넓이는 조각의 개수에 비례한다

빵의 반지름을 a, 중심을 원점이라 하자. 그러면 빵의 표면은

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

를 x축 둘레로 회전시켜 얻어진다. 미분하면 $|x| < a$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$이므로,

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

이다. 여기서 $x^2 + y^2 = a^2$와 $y > 0$을 이용하였다. 따라서 두 평면 $x = x_1$과 $x = x_2$ $(-a \le x_1 < x_2 \le a)$ 사이에 있는 구의 곡면 넓이는

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a \, (x_2 - x_1).$$

이다. (피적분함수는 끝점 $x = \pm a$에서만 정의되지 않는데, 그곳에서도 유계이므로 적분에는 문제가 없다.)

이제 빵을 각각 두께가 $h = 2a/N$인 N개의 조각으로 자른다고 하자. 모든 조각은 어디에 있든 정확히 $2\pi ah$의 넓이의 껍질을 가진다. 따라서 n개의 조각이 남아 있으면, 그 위치가 어떠하든 남은 껍질의 넓이는

$$A = n \cdot 2\pi ah,$$

이고, 이는 남은 조각의 개수 n에 비례한다. 이것이 보여야 할 내용이다. (이는 아르키메데스(Archimedes)의 오래된 결과이다. 구와 그 외접 원기둥은 임의의 두 평행한 평면 사이에서 같은 넓이를 가진다.)

껍질 조건

조각은 한쪽 끝에서부터 먹으므로, 몇 조각을 먹고 나면 남은 빵은 $0 < t \le 2a$인 어떤 t에 대하여 $x = -a$부터 $x = -a + t$까지의 구관이다. 첫 번째 부분에 의해 $A = 2\pi at$이다. 부피를 구하기 위해 $u = x + a$로 치환하면 $y^2 = a^2 - x^2 = (a - x)(a + x) = (2a - u)u$이므로

$$V = \pi \int_{-a}^{-a+t} (a^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^t (2au - u^2) \, \mathrm{d}u = \pi\left(at^2 - \frac{t^3}{3}\right).$$

이다. 따라서

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi t^2 \left(a - \frac{t}{3}\right)}{2\pi at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a} =: f(t).$$

이다.

> **생각해 보기** 이 비는 얼마나 먹었는지에 따라 달라진다. 어떤 t의 값을 신경 써야 하는가?

조건은 **몇** 조각을 먹은 뒤에도 성립해야 하므로, f의 최댓값이 필요하다. 완전제곱식으로 고치면

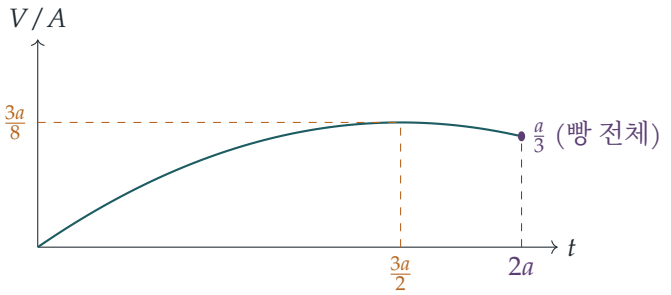
$$f(t) = \frac{3a}{8} - \frac{1}{6a}\left(t - \frac{3a}{2}\right)^2,$$

이므로 f는 $t = \frac{3a}{2}$ (이는 $(0, 2a]$에 속한다)일 때 최대이고, 최댓값은 $\frac{3a}{8}$이다.

$t = \frac{3}{2}a$는 실제로 나타나는가? 예를 들어 빵을 4조각으로 잘라 한 조각을 먹으면(또는 $4m$조각으로 잘라 m조각을 먹으면) 나타난다. 평행하게 자른 빵으로서 껍질 빵이라 불리려면 이러한 자르기에 대해서도 규정을 만족해야 하므로,

$$\frac{3a}{8} < 1, \qquad \text{즉} \qquad a < \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ 미터},$$

이어야 하고, 이것이 구하는 결과이다. 역으로 $a < \frac{8}{3}$이면 모든 t에 대하여 $f(t) \le \frac{3a}{8} < 1$이므로, 빵을 어떻게 자르든 껍질 빵이다.



위 그림은 $a = 2$일 때의 $f(t)$를 나타낸다. 빵의 가운데 쪽으로 갈수록 비가 증가하다가 이후 감소하는데, 반대쪽 끝 근처에서는 빵은 조금 늘어나는 반면 껍질은 많이 늘어나기 때문이다.

검산

- 빵 전체에 대해서는 $t = 2a$이므로 $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$이고, 이는 $\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$과 일치한다.
- $a = \frac{8}{3}$인 빵을 4조각으로 자른다고 하자. 남은 조각이 $1, 2, 3, 4$개일 때 비는 각각 $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$이므로, 한 조각을 먹은 뒤의 비는 정확히 1이 되어 엄격한 부등식을 아슬아슬하게 만족하지 못한다.
- 수치적으로, 무작위 조각에 대해 넓이 공식을 수치 적분하면 $2\pi a(x_2 - x_1)$이 재현되었고, $a = 2.66$일 때 200조각 이하로 자르는 모든 경우에 비가 1보다 작게 유지되었다.

흔한 실수

- 빵 전체만 고려하는 것: $a/3 < 1$에서 $a < 3$을 얻는데, 이는 필요조건이지만 훨씬 약한 조건이다. 가장 나쁜 순간은 빵 **폭**의 4분의 1을 먹었을 때이다.
- 평평한 자른 면을 껍질에 포함하는 것. 껍질은 원래의 곡면뿐이며, 주어진 공식이 측정하는 것도 바로 그것이다.

STEP 너머

피적분함수가 상수라는 사실은 아르키메데스의 모자 상자 정리(hat-box theorem)이다. 구를 외접 원기둥에 옆으로 사영하면 넓이가 보존된다. 구 위에서 균등하게 선택한 점의 높이

가 균등분포를 따르는 것도 이 때문이며, 이 사실은 확률론과 물리학에서 끊임없이 사용된다. 이와 같은 면적분(surface integral), 그리고 사상이 언제 넓이를 보존하는지는 벡터 미적분학(vector calculus) 첫 강좌에서 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 구의 관련 사상에 대한 아름다운 기하학적 논의가 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.