풀이

STEP I 2001, 문제 5

순수수학 • 적분 기호 아래에서의 미분

> **STEP I 2001, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q5

핵심 아이디어

(i)과 (ii)의 두 적분은 모두 직접 적분으로 계산할 수 있으며, 두 번째 적분은 $u = 1 + tx$로 치환(substitution)한 뒤에 계산된다. 진짜 요점은 끝에 붙은 언급에 있다. (ii)의 피적분함수(integrand)는 (i)의 피적분함수를 t에 대해 미분한 것이고, 두 답 사이에도 같은 관계가 성립한다. 따라서 적분 안에서 매개변수(parameter) t에 대해 미분하는 것과 x에 대해 적분하는 것은 순서를 바꿀 수 있는 것처럼 보인다. 이것을 한 번 더 하고 $t = 1$을 대입하면 추측(conjecture)을 얻는다.

풀이

전체에 걸쳐 $t > 0$이고 $0 \leq x \leq 1$이므로 $1 + tx \geq 1 > 0$이며, 어느 피적분함수도 발산하지 않는다.

소문항 (i)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+tx)^{-1} = -t(1+tx)^{-2}$이므로 $(1+tx)^{-2}$의 원시함수(antiderivative)는 $-\frac{1}{t(1+tx)}$이다(여기서 $t \neq 0$을 사용한다). 따라서

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

분자에 있는 x 때문에 직접 적분하기가 번거로우므로 $u = 1 + tx$로 놓는다. 그러면 $x = \dfrac{u-1}{t}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0, 1$은 $u = 1,\ 1+t$가 된다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\left(u^{-2}-u^{-3}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right).\end{aligned}$$

> **생각해 보기** 모든 항을 공통분모로 통분해 전개하지 않고 괄호 안을 어떻게 정리할 수 있을까?

$w = \dfrac{1}{1+t}$로 쓰면 괄호 안은 $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$으로 완전제곱식(perfect square)이 된다. 또한 $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$이므로

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

추측

x를 고정하고 피적분함수를 t의 함수로 보자.

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

즉 (ii)의 피적분함수는 (i)의 피적분함수를 t에 대해 미분한 것이며, 이는 (ii)의 답이 (i)의 답의 도함수인 것과 똑같다. 이로부터 다음 규칙을 짐작할 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

이 규칙을 한 번 더 적용하면

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

이므로, $t > 0$에 대하여 다음과 같이 추측한다.

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

$t = 1$을 대입하면 추측되는 값은

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

이다.

검산

- $t \to 0$일 때 (i)의 피적분함수는 1로 가고 답 $\frac{1}{1+t}$도 1로 간다. (ii)에서는 피적분함수가 $-2x$로 가고 그 적분은 -1이므로, $-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$과 일치한다.
- 추측을 확인하라는 요구는 없었지만 확인하는 것은 금방이다. $u = 1 + x$로 치환하면 적분은 $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$이 된다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 마지막 적분을 계산하면 0.250000이 나오고, 서로 다른 25개의 t 값에 대해 $\frac{2}{(1+t)^3}$과 소수점 아래 아홉째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$로부터 나오는 인수 $\frac{1}{t}$을 빠뜨리는 것. $\frac{1}{t}$은 **두** 번 나오는데, 하나는 x에서, 다른 하나는 $\mathrm{d}x$에서 나온다.
- 치환한 뒤 적분 구간을 $u = 1$과 $u = 1 + t$로 바꾸지 않는 것.
- $-(1+t)^{-2}$을 미분하여 $-2(1+t)^{-3}$을 얻는 것. 두 음의 부호는 서로 상쇄되므로 추측되는 값은 양수이다(피적분함수가 양수이므로 당연히 그래야 한다).

STEP 너머

우리가 추측한 규칙은 **적분 기호 아래에서의 미분**(differentiation under the integral sign), 즉 라이프니츠(Leibniz) 규칙(Leibniz's rule)이다. f와 $\partial f/\partial t$가 닫힌 직사각형(closed rectangle) 위에서 연속(continuous)이면 이 규칙이 성립한다는 것은 실해석학(real analysis)의 정리이며, 여기서는 $0 \le x \le 1$이고 t가 $a > 0$인 임의의 구간 $[a, b]$에 속할 때 이 조건이 성립한다. 같은 논증을 반복하면 모든 n에 대하여 $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$을 얻는다. 리처드 파인만(Richard Feynman)은 다른 방법으로는 잘 풀리지 않던 적분을 이 기법으로 계산한 것으로 유명하다. 극한, 도함수, 적분의 순서를 바꾸는 것에 관한 이론은 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.