풀이

STEP I 2001, 문제 4

순수수학 • 역삼각함수 방정식

> **STEP I 2001, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q4

핵심 아이디어

삼배각 공식(triple-angle formula)은 tan의 덧셈정리(addition formula)에서 곧바로 나온다. 그다음부터는 모든 것이 한 가지 사실에 달려 있다. tan는 주기(period) π로 반복되므로, $\tan 3\varphi = \tan 3\theta$이면 φ는 θ와 $\pi/3$의 임의의 정수배만큼 차이 날 수 있다. (i)과 (ii)에서 실제로 해야 할 일은 $\cos^{-1}$과 $\tan^{-1}$의 치역(range)을 꼼꼼히 따지는 것이며, 이것이 무수히 많은 각 가운데 어느 것이 허용되는지를 결정한다.

풀이

삼배각 공식

$t = \tan\theta$라 하자. 덧셈정리에 의해 $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 따라서

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + t}{1 - t\tan 2\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}$$

$$= \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $1 - t^2$을 곱했다. 이것이 구하는 공식이다. (이 식은 양변이 모두 정의될 때마다 성립한다.)

$\tan 3\theta$의 값

$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$이고 $0 < \theta < \pi/2$이므로 $\sin\theta > 0$이고, 따라서

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \tfrac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

이다. (세 변의 길이가 $1, 2, \sqrt{5}$인 직각삼각형을 떠올려 보자.) $t = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{11/8}{1/4} = \frac{11}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

나중에 θ가 꽤 작다는 사실이 중요해진다. $\tan\theta = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$이므로 $0 < \theta < \pi/6$이고, 따라서 $0 < 3\theta < \pi/2$이다.

소문항 (i)

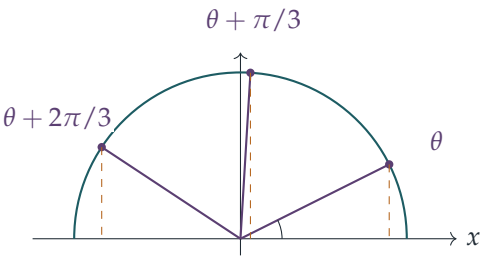
$\varphi = \cos^{-1} x$라 하면 $0 \le \varphi \le \pi$이고 $x = \cos\varphi$이다. 주어진 방정식은 $\tan 3\varphi = \frac{11}{2} = \tan 3\theta$라는 뜻이다. tan는 주기가 π이고 길이가 π인 각 구간에서 모든 값을 정확히 한 번씩 취하므로

$$3\varphi = 3\theta + k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \theta + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 이 각들 가운데 실제로 허용되는 것은 몇 개인가?

$0 \le \varphi \le \pi$이어야 한다. $0 < \theta < \pi/6$이므로 $k = 0, 1, 2$일 때 $\varphi = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{3},\ \theta + \frac{2\pi}{3}$이고, 이들은 모두 $(0, \pi)$의 내부에 있다. $k = 3$이면 $\varphi > \pi$이고 $k = -1$이면 $\varphi < 0$이다. 따라서 해는 정확히 세 개이다.



x의 세 값은 이 각들의 코사인(점선의 발)이다. $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$와 덧셈정리를

이용하면

$$x_1 = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$x_2 = \cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$
$$x_3 = \cos\theta\cos\tfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

이다. 이 각들 가운데 어느 것도 3φ를 $\pi/2$의 홀수배로 만들지 않으므로(각 3φ는 $0 < 3\theta < \pi/2$인 $3\theta + k\pi$이다), 모든 경우에 $\tan 3\varphi$가 정의된다. (i)의 해는

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \qquad x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

이다. (분모를 유리화(rationalising)하면 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$, $-\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$이다.)

다른 풀이. 삼배각 공식에 $T = \tan\varphi$를 넣으면 $2(3T - T^3) = 11(1 - 3T^2)$, 즉

$$2T^3 - 33T^2 - 6T + 11 = 0.$$

을 얻는다. $T = \frac{1}{2}$이 근(root)임을 알고 있으므로 인수분해(factorising)하면 $(2T-1)(T^2 - 16T - 11) = 0$이고, 따라서 $T = \frac{1}{2}$ 또는 $T = 8 \pm 5\sqrt{3}$이다. 그러면 $x = \cos\varphi = \pm 1/\sqrt{1+T^2}$이며, 부호는 T의 부호를 따른다(T가 양수이면 φ는 예각이고, 음수이면 둔각이다). 이렇게 해도 같은 세 답을 얻으며, $1 + (8+5\sqrt{3})^2 = 140 + 80\sqrt{3} = 1/x_2^2$임을 확인해 보는 것도 좋은 검산이 된다.

소문항 (ii)

$\psi = \frac{1}{3}\tan^{-1} y$라 하자. $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$이므로 $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$이다.

> **생각해 보기** 조건 $\cos\psi = 2/\sqrt{5}$는 각을 하나 주는가, 둘 주는가?

$(-\pi/6, \pi/6)$에서 cos는 우함수(even function)이므로 $\cos\psi = 2/\sqrt{5} = \cos\theta$에서 $\psi = \theta$ 또는 $\psi = -\theta$이고, $0 < \theta < \pi/6$이므로 둘 다 허용 범위 안에 있다. (다른 해는 없다. $[0, \pi/6)$에서 함수 cos는 순감소(strictly decreasing)하므로 그 구간에서 값 $2/\sqrt{5}$를 한 번만 취하고, $(-\pi/6, 0]$에서도 마찬가지이다.)

따라서 $\tan^{-1} y = \pm 3\theta$이다. $0 < 3\theta < \pi/2$이므로 $\pm 3\theta$는 둘 다 실제로 $\tan^{-1}$의 값이 될 수 있고,

$$y = \tan(\pm 3\theta) = \pm\frac{11}{2}.$$

이다. (ii)의 해는 $y = \frac{11}{2}$과 $y = -\frac{11}{2}$이다.

검산

- $\theta = \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636$이므로 $3\theta \approx 1.3909$이고 $\tan 3\theta \approx 5.5000$이다.
- $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \approx 0.05992$이고 $x_3 \approx -0.83451$이다. 계산기로 확인하면 각각에 대해 $\tan(3\cos^{-1} x) \approx 5.5$이고, $[-1, 1]$을 촘촘하게 수치적으로 훑어보면 해가 정확히 세 개 나온다.
- $\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}(\pm 5.5)\right) = \cos(\pm 0.4636) \approx 0.8944 = 2/\sqrt{5}$이다.

흔한 실수

- (i)에서 $x = 2/\sqrt{5}$만 답하는 것. tan가 π마다 반복되므로 3φ는 $[0, 3\pi]$에서 세 가지 값을 가질 수 있다는 점을 잊은 것이다.
- (ii)에서 $y = 11/2$만 답하는 것. cos는 우함수이므로 $\psi = -\theta$도 성립한다.
- 범위를 확인하지 않는 것. 답은 $\theta < \pi/6$에 달려 있으며, 바로 이 때문에 (i)에서 $\theta + 2\pi/3$이 허용되고 (ii)에서 3θ가 $\tan^{-1}$의 치역 안에 놓인다.

STEP 너머

역삼각함수(inverse trigonometric functions)는 일대일(one-to-one)이 아닌 함수의 역함수를 구하는 문제를 처음 맛보게 해 준다. 우리는 **주가지**(*principal branch*)를 택하며, 이런 방정식은 사실 우리가 어느 가지(branch) 위에 있는지에 관한 문제이다. 복소해석학(complex analysis)에서는 같은 문제가 $\log z$와 $z^{1/3}$에서 나타나는데, 원점 둘레를 한 바퀴 돌면 한 가지에서 다음 가지로 넘어가게 되며, 이는 여기서 θ에 $2\pi/3$을 더하는 것과 똑같다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 그림을 통해 가지를 아름답게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.