풀이

STEP I 2001, 문제 3

순수수학 • 삼차식과 판별식

> **STEP I 2001, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q3

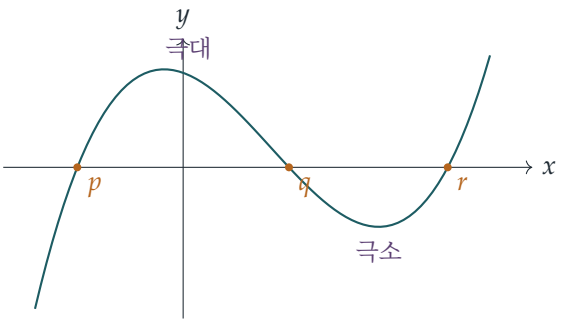
핵심 아이디어

서로 다른 세 실근을 가지는 삼차함수(cubic)의 그래프는 이웃한 두 근 사이마다 방향을 바꾸어야 하므로, 그 도함수(derivative)인 이차식(quadratic)은 서로 다른 두 실근을 가진다. "서로 다른 두 실근"을 "판별식(discriminant)이 양수"로 바꿔 쓰면 첫 번째 부등식을 얻는다. 두 번째 부분에서는 주어진 곱이 삼차식이고 그 계수가 바로 목표 부등식에 나오는 양들이므로, 첫 번째 부분(또는 완전제곱식(completed square))이 문제를 해결해 준다.

풀이

그래프 그리기

전개하면 $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$ 이므로 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이고 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이다. 그래프는 p, q, r에서만 x축과 만나고, 각 근이 단순근(simple root)이므로 f는 각 근에서 부호가 바뀐다. 즉 $x < p$에서 $f < 0$, (p, q)에서 $f > 0$, (q, r)에서 $f < 0$, $x > r$에서 $f > 0$이다. 따라서 p와 q 사이 어딘가에 극대(local maximum)가 있고, q와 r 사이 어딘가에 극소(local minimum)가 있다. y절편은 $f(0) = -pqr$이다.



(그림은 $p < 0 < q < r$인 경우로 그렸다. 근이 어디에 있든 모양은 같고, y축의 위치만 달라진다.)

첫 번째 부등식

완전히 전개하면

$$f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (qr+rp+pq)x - pqr,$$

이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 2(p+q+r)x + (qr+rp+pq).$$

$f(p) = f(q) = 0$이므로 롤의 정리(Rolle's theorem)에 의해 p와 q 사이(양 끝 제외)에 f'의 근이 존재한다. 마찬가지로 q와 r 사이에도 근이 존재한다. 이 두 구간은 겹치지 않으므로 이차방정식 $f'(x) = 0$은 **서로 다른** 두 실근을 가진다. (롤의 정리를 쓰지 않는다면: $f'(p) = (p-q)(p-r) > 0$, $f'(q) = (q-p)(q-r) < 0$, $f'(r) = (r-p)(r-q) > 0$이므로 f'은 각 구간에서 부호가 바뀐다.)

이차식이 서로 다른 두 실근을 가지는 것은 판별식이 양수일 때와 정확히 같으므로

$$4(p+q+r)^2 - 12(qr+rp+pq) > 0, \qquad \text{즉,} \qquad (p+q+r)^2 > 3(qr+rp+pq),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

두 번째 부등식

전개하면

$$(x^2+gx+h)(x-k) = x^3 + (g-k)x^2 + (h-gk)x - hk.$$

이것을 f의 전개식과 비교하자. 이 삼차식의 근이 p, q, r이라면

$$p+q+r = -(g-k), \qquad qr+rp+pq = h-gk,$$

이므로 목표 부등식 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$는 이 삼차식의 근에 대한 첫 번째 부등식과 정확히 같다.

충분조건(*sufficient*)임. $g^2 > 4h$라 하자. 그러면 $x^2 + gx + h$는 서로 다른 두 실근 $\alpha < \beta$를 가지고, 삼차식은 실근 α, β, k를 가진다. k가 두 근 모두와 다르면 세 근은 서로 다르므로 첫 번째 부분에 의해 곧바로 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$를 얻는다.

생각해 보기 k가 마침 α나 β와 같아서 근들이 서로 다르지 않다면 어떻게 될까?

첫 번째 부분은 $p < q < r$을 가정했으므로 조금 더 따져 보아야 한다. 항등식(identity)

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}[(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2]$$

은 $p = q = r$인 경우를 제외하면 좌변이 양수임을 보여 준다. $\alpha \neq \beta$이므로 세 근이 모두 같아지는 일은 없고, 따라서 이 경우에도 부등식이 성립한다.

근을 전혀 쓰지 않는 직접적인 방법도 있다. 전개하면

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2 + gk + k^2 - 3h = (k + \tfrac{1}{2}g)^2 + \tfrac{3}{4}(g^2 - 4h),$$

이고, $g^2 > 4h$이면 이것은 제곱식에 양수를 더한 것이므로 양수이다. 어느 방법으로든 $g^2 > 4h$는 충분조건이다.

필요조건(*necessary*)**은 아님**. $g^2 \leq 4h$이면서도 부등식이 성립하는 값을 찾으면 된다. $g = 0$, $h = 1$, $k = 2$로 두자. 그러면 $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$이지만

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

따라서 $g^2 > 4h$가 아니어도 부등식이 성립할 수 있으므로, 이 조건은 필요조건이 아니다.

생각해 보기 첫 번째 부분에서는 세 실근이 필요했는데, 어떻게 이럴 수 있을까?

첫 번째 부분에서 실제로 필요했던 것은 $f'(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가진다는 사실뿐이었고, 이는 더 약한 조건이다. 여기서 삼차식 $(x^2+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$는 실근을 하나만 가지지만, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$이므로 여전히 정류점(stationary point)이 두 개 있다. 부등식 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$는 삼차함수가 축과 세 번 만나든 그렇지 않든, 서로 다른 극대와 극소를 가진다는 것을 정확히 말해 준다.

검산

- $p, q, r = 0, 1, 2$이면 $(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$이고, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$의 근은 $1 \pm 1/\sqrt{3}$으로 하나는 $(0,1)$에, 하나는 $(1,2)$에 있다.
- 완전제곱식 공식은 부등식의 경계가 정확함을 보여 준다. $g = 2$, $h = 1$(따라서 $g^2 = 4h$), $k = -1$이면 $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$로, 엄격한 부등식이 아니라 등식이 된다. 이것은 세 근이 모두 같은 삼차식 $(x+1)^3$이다.

- 컴퓨터로 두 항등식과 두 부등식을 각각 20 000개의 무작위 유리수 경우에 대해 정확히 확인했고, 예 $g = 0, h = 1, k = 2$도 확인했다($4 > 3$이 된다).

흔한 실수

- 삼차함수의 그래프를 위아래 거꾸로 그리는 것: x^3의 계수가 $+1$이므로 그래프는 오른쪽으로 갈수록 올라간다.
- k가 $x^2 + gx + h$의 근인 경우를 빠뜨리는 것: 이 경우에는 첫 번째 부분을 주어진 그대로 적용할 수 없다.
- $g^2 \leq 4h$인 예 하나에서 부등식이 성립함을 보이고 그것을 "충분조건"이라고 부르는 것: 예 하나로 증명되는 것은 **필요조건이 아님**이다. 충분조건임을 보이려면 모든 g, h, k에 대한 증명이 필요하다.

STEP 너머

양 $(p + q + r)^2 - 3(qr + rp + pq)$는 상수배를 제외하면 도함수의 판별식이며, 근에 대한 **대칭함수**(*symmetric function*)이다. 이런 함수는 모두 계수로 나타낼 수 있는데, 바로 그 때문에 부등식을 근에 관한 것에서 g, h, k에 관한 것으로 옮길 수 있었다. 삼차식의 완전한 판별식 $\prod(p - q)^2$는 세 근이 모두 실수인지를 판정한다. 이 문제는 그보다 약한 사촌을 사용한 셈이다. 대칭함수와 판별식은 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 시작하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.