풀이

STEP I 2001, 문제 2

순수수학 • 대수적 부등식

> **STEP I 2001, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

핵심 아이디어

부등식(inequality)에서는 부호를 모르는 식을 양변에 곱할 수 없으므로, (i)에서 안전한 방법은 모든 항을 한쪽으로 모은 뒤 인수분해하는 것이다. 그러면 답은 부호표(sign diagram)에서 바로 읽을 수 있다. (ii)에서는 제곱근 때문에 양변을 제곱하고 싶어지지만, 이는 양변이 모두 음이 아님을 알 때에만 정당하다. 이 조건을 끝까지 놓치지 않는 것이 이 문제의 전부이다.

풀이

소문항 (i)

x는 음수일 수 있으므로 양변에 x를 곱할 수는 없다. 대신 x^2을 곱한다. $x \neq 0$이므로 x^2은 양수이고, 따라서 부등호의 방향이 유지된다.

$$\begin{aligned} 1 + 2x - x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2 + 2x^3 - x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \\ &\iff x\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) < 0. \end{aligned}$$

삼차식은 항을 묶어서 인수분해할 수 있다.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

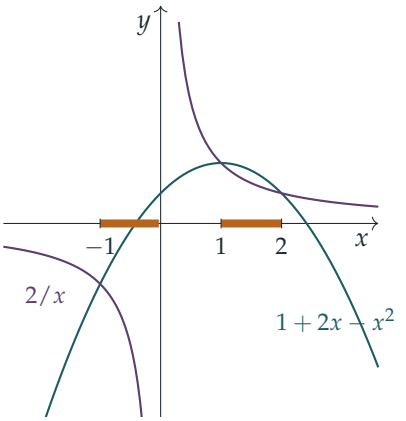
따라서 다음이 성립해야 한다.

$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

이 식은 최고차항의 계수가 양수이고 네 개의 단순근 $-1, 0, 1, 2$를 갖는 사차식이므로, x가 각 근을 지날 때마다 부호가 바뀐다. 즉 $x > 2$에서 양수, $(1, 2)$에서 음수, $(0, 1)$에서 양수, $(-1, 0)$에서 음수, $x < -1$에서 양수이다. 근 자체에서는 값이 0이 되어 < 0을 만족하지 않는다(그리고 $x = 0$은 어차피 제외된다). 그러므로

$$\boxed{-1 < x < 0 \quad \text{또는} \quad 1 < x < 2.}$$

그림도 이와 일치한다. 포물선 $y = 1 + 2x - x^2$은 두 곡선이 만나는 $x = -1, 1, 2$ 사이에서 정확히 쌍곡선 $y = 2/x$보다 위에 있고, 음의 쪽에서는 쌍곡선이 $x = 0$에서 $-\infty$로 곤두박질치기 전까지만 위에 있다.



소문항 (ii)

먼저 $x \geq -\frac{10}{3}$이면 $3x + 10 \geq 0$일 뿐 아니라 $x + 4 \geq \frac{2}{3} > 0$이므로, 두 제곱근은 전 범위에서 정의된다.

양변은 모두 음이 아니고, $a, b \geq 0$일 때 $a > b \iff a^2 > b^2$이다. 따라서 해를 새로 만들거나 잃지 않고 양변을 제곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10} > 2 + \sqrt{x+4} &\iff 3x + 10 > 4 + 4\sqrt{x+4} + (x+4) \\ &\iff 2x + 2 > 4\sqrt{x+4} \\ &\iff x + 1 > 2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

? 생각해 보기 그냥 한 번 더 제곱해도 될까?

곧바로는 안 된다. 우변 $2\sqrt{x+4}$는 양수이지만 $x+1$은 음수일 수 있고, 그러면 제곱하는 과정에서 거짓인 부등식이 참인 부등식으로 바뀔 수 있다. 그래서 경우를 나눈다.

▶ $x + 1 \leq 0$이면 좌변은 0 이하이고 우변은 양수이다. 따라서 부등식이 성립하지 않는다.

- $x+1>0$이면 양변이 모두 양수이므로, 이번에도 제곱은 동치 변형이다.

$$\begin{aligned} x+1>2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1>4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15>0 \\ &\iff (x-5)(x+3)>0, \end{aligned}$$

  이 부등식은 $x>5$ 또는 $x<-3$일 때 성립한다. $x>-1$과 합치면 $x>5$만 남는다.

그러므로

$$\boxed{x>5.}$$

검산

- $x=5$에서는 $\sqrt{25}=5, 2+\sqrt{9}=5$이므로 등호가 성립하며, 경계에서는 마땅히 그래야 한다. $x=12$에서는 $\sqrt{46}\approx 6.78>2+4=6$이다. $x=0$에서는 $\sqrt{10}\approx 3.16<4$이다.
- (i)에서 $x=1.5$이면 $1.75>1.33$, $x=-0.5$이면 $-0.25>-4$로 둘 다 참이다. $x=0.5$이면 $1.75<4$로 거짓이다.
- 컴퓨터로 두 부등식을 각각 2×10^5개의 무작위 점과 모든 경계에서 10^{-6} 이내에 있는 점들에서 검사한 결과, 위의 답과 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- (i)에서 $x>0$과 $x<0$으로 나누지 않고 x를 곱하는 것. 이렇게 하면 구간 $(-1,0)$을 잃거나 그 구간에서 답이 뒤집힌다.
- $x+1>0$이라는 조건 없이 $x+1>2\sqrt{x+4}$를 제곱하는 것. 그러면 가짜 구간 $-\frac{10}{3}\le x<-3$이 생긴다. 원래 부등식에 $x=-3.2$를 대입해 보면 성립하지 않음을 알 수 있다($\sqrt{0.4}\approx 0.63<2+\sqrt{0.8}$).

STEP 너머

(ii)에 쓰인 원리, 즉 어떤 연산이 부등식을 보존하는 것은 그 연산이 관련된 값들에서 증가함수(increasing function)일 때뿐이라는 원리는 해석학자들이 부등식을 다루는 방식의 출발점이다. $t\mapsto t^2$은 $[0,\infty)$에서는 증가하지만 $\mathbb{R}$에서는 그렇지 않다. 곱의 부호표는 연속함수(continuous function)가 영을 지나지 않고서는 부호를 바꿀 수 없다는 사실, 곧 중간값 정리(intermediate value theorem)로 일반화된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 가지를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.