풀이

STEP I 2001, 문제 11

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP I 2001, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

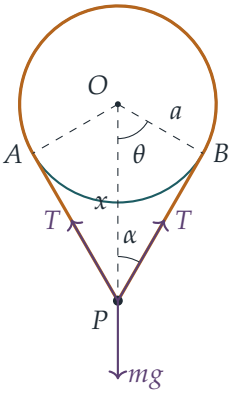
step.maths.org/questions/01-s1-q11

핵심 아이디어

입자가 밴드를 아래로 끌어당기면, 밴드는 길이의 대부분에 걸쳐 원기둥에 붙어 있다가 양쪽에서 **접선**(*tangent*) **방향으로** 원기둥을 떠나 입자까지 곧게 뻗는다. 따라서 모든 것은 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 기하로 귀결된다. 원기둥이 매끄러우므로(smooth) 장력(tension)은 밴드 전체에 걸쳐 같고, 따라서 **전체** 늘어난 길이(extension)에 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하면 장력을 구할 수 있다. 그러면 소문항 (i)은 에너지 문제이고(입자는 가장 낮은 점에서 순간적으로 정지한다), 소문항 (ii)는 힘의 문제이다(속력이 최대라는 것은 가속도가 0이라는 뜻이다).

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 밴드는 가볍고 탄성(elastic)이 있는 것(훅의 법칙을 따르는 것)으로, 원기둥은 매끄러운 것으로 모형화한다. 단면의 중심을 O라 하고, 입자 P가 O보다 거리 x만큼 아래에 있다고 하자. 단, $x \geq a$이다. 밴드는 점 A와 B에서 원을 떠나며, PA와 PB는 접선이다.



기하와 장력

삼각형 OAP는 A에서 직각이다(접선은 반지름에 수직이다). 따라서

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

이다. 여기서 $\theta = \angle AOP$이고, $\alpha = \angle APO$는 밴드의 각 직선 부분이 연직선과 이루는 각이다. 밴드는 P에 가장 가까운, 중심각이 2θ인 호 AB를 제외한 모든 곳에서 원과 접촉하고 있으므로, 밴드의 길이는

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

이다. 자연 길이(natural length)는 $2\pi a$이므로 늘어난 길이는

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

이다. 원기둥이 매끄러우므로 밴드를 따라 마찰이 없고, 따라서 장력 T는 어디서나 같으며, 훅의 법칙에 의해 $T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$이다.

$x = 2a$일 때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$이다. 따라서

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

소문항 (i)

놓는 순간 입자는 원기둥의 맨 아래, 즉 $x = a$에 있고, 밴드는 늘어나지 않은 상태이며, 입자는 정지해 있다. $x = 2a$에서 입자는 다시 정지한다(더 이상 내려가지 않는다). 따라서 두 순간 모두 운동 에너지는 0이다. 원기둥이 매끄러우므로 에너지 손실이 없고, 중력 위치 에너지(gravitational potential energy)의 감소량은 탄성 에너지(elastic energy)의 증가량과 같다. 입자가 내려간 거리는 $2a - a = a$이고, 자연 길이가 $2\pi a$이고 늘어난 길이가 e인 밴드

의 탄성 에너지는 $\dfrac{\lambda e^2}{2\cdot 2\pi a}$이다. 그러므로

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a}\cdot\frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2}{9\pi},$$

이고, 이로부터

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2},$$

을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다.

생각해 보기 밴드의 일부가 원기둥에 감겨 있는데, 밴드 전체에 탄성 에너지 공식을 써도 될까?

그렇다. 원기둥이 매끄러우므로 장력, 따라서 단위 길이당 늘어난 정도는 감겨 있든 아니든 밴드 전체에 걸쳐 같다. 밴드는 자연 길이가 $2\pi a$이고 전체 늘어난 길이가 e인 하나의 탄성 줄과 정확히 똑같이 행동하며, 공식 $\lambda e^2/(2l)$이 나타내는 것이 바로 이것이다.

소문항 (ii)

속력은 가속도가 0일 때, 즉 입자에 작용하는 합력(resultant force)이 0일 때 최대이다. 수평 방향으로는 대칭성에 의해 두 장력이 상쇄된다. P에서 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2T\cos\alpha = mg.$$

이다. $x = 2a$에서 $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sqrt{3}\,T = mg$이고, 따라서 $T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$이다. 앞에서 구한 늘어난 길이로 훅의 법칙을 적용하면

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a}\cdot\frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

이다. T에 대한 두 식을 같게 놓으면

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

생각해 보기 이것이 단지 정상점(stationary point)이 아니라 속력의 최댓값이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

x가 증가하면 e가 증가하고(밴드의 각 직선 부분이 길어지는 속도가 호 $a\theta$가 줄어드는 속도보다 빠르다), $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$도 증가하므로, 위쪽 방향의 힘 $2T\cos\alpha$는 0에서부터 꾸준히 증가한다. 아래쪽 방향의 알짜힘은 $x = 2a$보다 위에서는 양수이고 아래에서는 음수이므로, 입자는 $x = 2a$까지는 빨라지고 그 이후에는 느려진다.

검산

- 깔끔한 일관성 검사: L을 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$이다. 따라서 탄성 에너지의 변화율 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$는 위쪽 방향의 힘 $2T\cos\alpha$와 같다. (i)의 에너지 방법과 (ii)의 힘의 방법이 서로 일치한다.
- 수치로 보면 (i)에서는 $\lambda \approx 6.70\,mg$이고 (ii)에서는 $\lambda \approx 2.65\,mg$이다. (ii)의 밴드가 더 약한데, 이는 타당하다. (ii)에서는 입자가 $x = 2a$에서 여전히 움직이고 있어 그 지점을 지나쳐 계속 내려가지만, (i)에서는 더 뻣뻣한 밴드가 이미 입자를 정지시켰기 때문이다.
- 운동 방정식 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$를 $x = a$에서 정지 상태로부터 수치적으로 단계별 계산하면, 첫 번째 λ 값에 대해서는 가장 낮은 점이 $x = 2.0000a$로, 두 번째 값에 대해서는 최대 속력이 $x = 2.0000a$에서 나온다.

흔한 실수

- 밴드의 일부가 원기둥을 떠난다는 것을 잊는 실수: 늘어난 길이는 두 직선 부분의 길이만이 아니라, $2\sqrt{x^2-a^2}$에서 잃어버린 호 $2a\theta$를 뺀 것이다.
- 내려간 거리를 놓은 지점이 아니라 축에서부터 재는 실수: 입자가 내려간 거리는 $2a$가 아니라 a이다.
- 연직 방향으로 분해할 때 $\cos\alpha$ 대신 $\sin\alpha$를 쓰는 실수: α는 연직선으로부터 잰 각이고, $\sin\alpha = a/x$이다.

STEP 너머

d(탄성 에너지)/dx가 복원력과 같다는 검산은 가상일의 원리(principle of virtual work)의 한 예이다. 보존계(conservative system)에서 임의의 방향으로 작용하는 힘은 그 방향으로의 위치 에너지 변화율에 음의 부호를 붙인 것이다. 계를 하나의 좌표와 그 위치 에너지로 기술하는 이러한 관점은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이며, 대학 역학 강좌의 1학년이나 2학년에서 만나게 될 것이다. 에너지, 힘, 퍼텐셜을 꼼꼼하게 다룬 책으로 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.