풀이

STEP I 2001, 문제 10

역학 • 포물체의 비행 시간

> **STEP I 2001, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q10

핵심 아이디어

선택을 두 부분으로 나누어 생각한다. 앙각(elevation)은 비행 시간(time of flight)과 수평 도달 거리(horizontal range)를 모두 결정하고, 방향은 포탄(shell)이 대포를 중심으로 하는 원 위의 어디에 떨어지는지만 정한다. 따라서 포탄이 선로에 명중할 수 있는 것은 도달 거리가 d 이상일 때이고, 그때뿐이다. 비행 시간은 앙각이 커질수록 길어지지만, $45°$를 넘어서면 도달 거리가 줄어든다. 그러므로 도달 거리가 정확히 d로 줄어들 때까지 앙각을 높인다.

풀이

주어진 앙각에서의 비행 시간과 도달 거리

포탄을 중력만 받아 움직이는(공기 저항(air resistance)이 없는) 질점(particle)으로 모형화하고, 지면 높이에서 발사되어 평원에 떨어진다고 하자. 앙각 α로 발사하며, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$이다. 속도의 연직 성분은 $v\sin\alpha$이고 수평 성분은 $v\cos\alpha$이다.

연직 방향으로, 시간 t가 지난 뒤의 높이는 $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이고, 이 값은

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

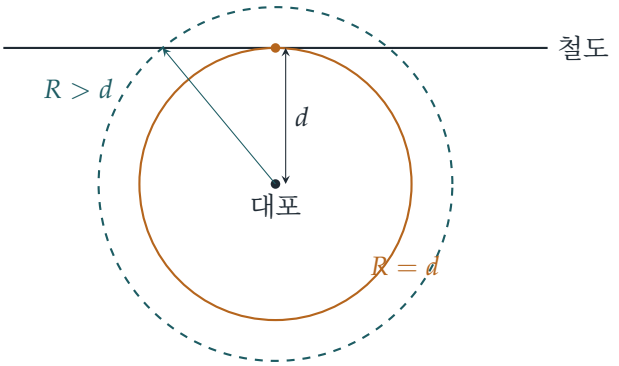
일 때 다시 0이 된다. 그동안 포탄이 이동하는 수평 거리는

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

이다.

포탄은 언제 선로에 명중할 수 있는가?

앙각을 고정하고 대포를 돌리면, 낙하 지점은 대포를 중심으로 하는 반지름 R인 원 위를 움직인다. 선로 위에서 가장 가까운 점까지의 거리는 d이고, 선로 위의 다른 모든 점은 그보다 멀리 있다. 따라서 원이 선로와 만날 필요충분조건은 $R \geq d$이다. $R = d$이면 원은 선로에 딱 접하고, 대포는 가장 가까운 점을 똑바로, 즉 선로에 수직인 방향으로 겨누어야 한다.



(위에서 내려다본 그림이다. 점선 원은 더 낮은 앙각에 해당하며, 선로와 두 점에서 만난다. 실선 원은 최적의 앙각에 해당하며, 선로에 겨우 닿는다.)

따라서 포수가 앙각 α로 선로를 맞힐 수 있는 것은 정확히

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

일 때이다. $k = gd/v^2$라 하자. $v^2 > gd$로 주어졌으므로 $0 < k < 1$이고, 가능한 앙각이 존재한다. (최대 도달 거리는 45°에서의 v^2/g이므로, 이 조건은 단지 선로가 사정거리 안에 있다는 뜻이다.)

비행 시간의 최대화

$T = 2v \sin\alpha / g$이고 $\sin\alpha$는 $(0, \frac{\pi}{2}]$에서 증가하므로, T를 최대로 하려면 허용되는 α 가운데 가장 큰 값을 골라야 한다.

$0 < 2\alpha \leq \pi$일 때, 조건 $\sin 2\alpha \geq k$가 성립할 필요충분조건은

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

이다. 따라서 허용되는 가장 큰 앙각은 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$이고, 이는 45°보다 크다. 이 앙각에서 $\sin 2\alpha = k$이고, 2α가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있으므로 $\cos 2\alpha$는 음수이다.

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

생각해 보기 선로를 따라 먼 곳에 있는 점을 겨누어 포탄이 더 멀리 날아가게 하는 편이 낫지 않을까?

그렇지 않다. 더 멀리 날아가려면 **더 큰** 도달 거리가 필요하고, $45°$보다 위에서는 이것이 **더 낮은** 앙각, 따라서 더 짧은 비행을 뜻한다. 비행 시간은 앙각에만 의존하므로, 최선은 선로에 여전히 닿는 가장 가파른 발사이다. 그 도달 거리는 정확히 d이므로, 포탄은 대포에서 선로에 내린 수선의 발에 떨어진다.

이제 T를 제곱하고 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$를 이용한다.

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

여기서 v^2을 제곱근 안으로 넣었다($v^2 > 0$이므로 가능하다). 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $d \to 0$이면 공식에서 $g^2T^2 \to 4v^2$, 즉 $T \to 2v/g$이다. 이는 바로 위로 쏘는 경우로, 가능한 가장 긴 비행이며, 선로가 대포 바로 옆을 지날 때 옳은 결과이다.
- $v^2 = gd$이면 선로는 겨우 사정거리 안에 있다. 가능한 발사는 $45°$뿐이고, 공식은 $g^2T^2 = 2v^2$을 주며, 이는 $T = 2v\sin 45°/g = \sqrt{2}\,v/g$와 일치한다.
- 수치로 확인하면, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $d = 100\,\mathrm{m}$, $v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$일 때 최적 앙각은 약 $71.1°$이고 공식은 $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$를 준다. 운동을 수치적으로 단계별 계산해도 같은 시간이 나오고, 포탄은 선로에 떨어진다. 모든 앙각에 대한 전수 탐색도 수백 개의 무작위 경우에서 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 작은 쪽의 근 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$를 택하는 것. 이 발사도 선로를 맞히지만, 가장 긴 비행 시간이 아니라 **가장 짧은** 비행 시간을 준다. 사실상 $\cos 2\alpha$의 부호를 잘못 택한 것이다.
- 처음부터 포탄이 선로에서 가장 가까운 점에 떨어져야 한다고 가정하는 것. 결과적으로는 맞지만, 위의 논증이 필요하다. 다른 점을 맞히려면 더 큰 도달 거리, 따라서 더 낮은 앙각이 필요하다.

STEP 너머

이것은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 한 양(비행 시간)을 제약 조건(선로에 닿기) 아래에서 최대화하며, 최적점은 허용되는 영역의 경계에 있다. 대학 1학년 역학과 최적화 과목에서는 이를 위한 일반적인 도구, 예를 들어 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)를 배우고, 이와 관련된 개념으로 모든 궤적의 **포락선**(envelope), 즉 "안전 포물선"(parabola of safety)을 만나게 된다. 이 포락선은 대포가 도달할 수 있는 모든 점의 경계를 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 질점 역학을 깊이 공부하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.