풀이

STEP I 2001, 문제 1

순수수학 • 기하 부등식

> **STEP I 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q1

핵심 아이디어

정사각형의 서로 다른 세 변 위에 있는 세 점은 반드시 마주 보는 한 쌍의 변을 사용하고, 세 번째 변은 그 두 변을 잇는다. 각 점이 0과 1 사이의 매개변수(parameter) 하나만 가지도록 정사각형에 좌표를 놓는다. 그런 다음 귀류법(proof by contradiction)으로 논증한다. 삼각형의 세 변이 모두 주어진 한계보다 길다면 각 길이 조건이 매개변수 하나씩을 조이고, 이 조임이 합쳐지면 한 점이 정사각형 밖으로 밀려나게 된다.

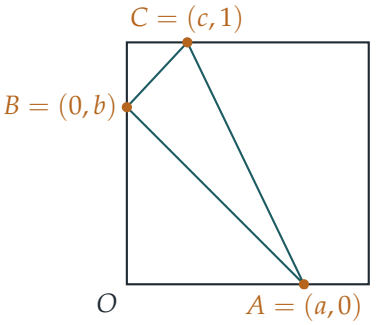
풀이

단위는 센티미터로 한다. 변은 네 개이고 세 점은 서로 다른 변 위에 있으므로, 세 점이 놓이지 않은 변은 정확히 하나이다. 따라서 두 점은 마주 보는 한 쌍의 변 위에 있고, 세 번째 점은 그 두 변 모두와 이웃한 변 위에 있다. 정사각형이 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$이 되도록 좌표축을 잡으면

$$A = (a, 0) \text{ 아래 변 위}, \qquad B = (0, b) \text{ 왼쪽 변 위}, \qquad C = (c, 1) \text{ 위 변 위},$$

이고 $a, b, c \in [0, 1]$이다. (정사각형을 회전하거나 대칭이동해도 길이는 변하지 않으므로, 이렇게 해도 일반성을 잃지 않는다(without loss of generality).) 그러면

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1-b)^2, \qquad CA^2 = (c-a)^2 + 1.$$



$k = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $t = 2 - \sqrt{3}$이라 하자. 다음 두 가지 간단한 사실 덕분에 수치가 깔끔하게 정리된다.

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{따라서} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

또한 $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$이므로 $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$이고, 따라서

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

귀류법을 위해 삼각형의 세 변이 모두 k보다 길다고 가정하자. 정사각형을 직선 $y = \frac{1}{2}$에 대해 대칭이동하는 대칭성(A와 C의 역할, 그리고 a와 c의 역할을 서로 바꾼다)에 의해 $c \geq a$라고 가정해도 된다.

$BC > k$로부터. $c \leq 1$이므로

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

이고, 따라서 $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$이다. $1 - b \geq 0$이고 $t > 0$이므로 $1 - b > t$, 즉 $0 \leq b < 1 - t$이다.

$AB > k$로부터. $0 \leq b < 1 - t$이므로 $b^2 < (1 - t)^2$이고, 따라서

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

$a \geq 0$이므로 $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$이다.

? 생각해 보기 a의 범위를 좁혔다. 세 번째 변 CA는 무엇을 더해 주는가?

변 CA는 정사각형을 아래에서 위로 가로지르므로 세로 방향의 길이가 1이고, 나머지 길이는 가로 방향으로 채워야 한다.

$CA > k$로부터. $(c - a)^2 + 1 > k^2$이므로 $(c - a)^2 > t^2$이고, $c \geq a$이므로 $c - a > t$이다. 따라서

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

그런데 C는 위 변 위에 있으므로 $c \le 1$이다. 이 모순은 세 변이 모두 k보다 길 수는 없음을 보여 준다. 즉 삼각형 ABC의 변 가운데 적어도 하나의 길이는 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$ 이하이며, 이로써 증명이 끝난다.

한계는 실제로 달성된다

$c = 1$이고 $a = b = \sqrt{3}-1$일 때, 즉 $A = (\sqrt{3}-1, 0)$, $B = (0, \sqrt{3}-1)$, $C = (1,1)$일 때 위의 모든 부등식(inequality)에서 등호가 성립한다. 이때

$$AB^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3},$$

이므로 ABC는 한 변의 길이가 정확히 k인 정삼각형(equilateral triangle)이다(C는 꼭짓점에 있지만 위 변 위에 있는 것으로 센다). 따라서 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$는 가능한 최선의 상수이다. 삼각함수로 나타내면 $k = \sec 15^\circ$이다. 이것은 단위 정사각형 안에 들어가는 가장 큰 정삼각형으로, 정사각형의 변에 대해 15° 기울어져 있다.

검산

- $k = \sqrt{6}-\sqrt{2} \approx 1.0353$은 정사각형의 한 변보다 조금 크다. 이는 타당하다. 세 변 위에 꼭짓점을 하나씩 가진 삼각형은 모든 변이 1보다 길 수 있지만, 아주 조금만 길 수 있다.
- 2×10^6개의 순서쌍 $(a,b,c) \in [0,1]^3$에 대해 무작위 탐색을 해 보면 가장 짧은 변은 한 번도 1.0337을 넘지 않았으며, 이는 k보다 작다. 위의 정삼각형 예에서는 세 변이 모두 기계 정밀도 내에서 1.03528과 같다.
- $\sec 15^\circ = 4/(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$이므로 정삼각형 그림과 일치한다.

흔한 실수

- 증명 없이 삼각형이 정삼각형이라거나 한 꼭짓점이 정사각형의 꼭짓점에 있다고 가정하는 것. 극단적인 경우는 답을 암시하지만, 모든 배치에 대해 부등식을 증명해 주지는 않는다.
- 설정의 정당성을 밝히지 않는 것. 핵심이 되는 구조적 사실은 서로 다른 세 변에는 반드시 마주 보는 한 쌍이 포함된다는 것이다.
- $(1-b)^2 > t^2$나 $(c-a)^2 > t^2$에서 어느 부호인지 밝히지 않고 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

이것은 작은 **최대–최소**(*max–min*) 문제이다. 우리는 배치들로 이루어진 콤팩트(compact) 집합 위에서 가장 짧은 변의 길이를 최대화하고 있으며, 극단적인 배치에서는 모든 제약 조건이 한꺼번에 같아진다. 이는 최적화(optimisation)와 게임 이론(game theory) 전반에 걸쳐 나타나는 패턴이다. $[0,1]^3$은 닫혀 있고 유계(closed and bounded)이며 가장 짧은 변의 길이는 연속함수(continuous function)이므로 최댓값이 반드시 존재한다. 이 사실은 해석학(analysis) 첫 강의에서 증명된다(최대·최소 정리(extreme value theorem)). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이 내용을 잘 다루고 있으며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 같은 맥락의 STEP 기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.