풀이

STEP III 2000, 문제 9

역학 • 비스듬한 탄성 충돌

STEP III 2000, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

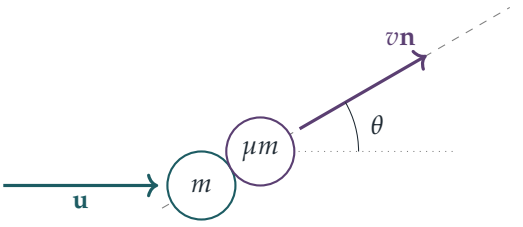
step.maths.org/questions/00-s3-q9

핵심 아이디어

두 원판은 매끄러우므로(smooth), 충돌(impact)하는 동안 둘 사이에 작용하는 힘은 중심선(line of centres)을 따라서만 작용한다. 따라서 처음에 정지해 있던 원판은 그 선을 따라 움직이기 시작하고, 그러므로 $\mathbf{n}$이 바로 중심선의 방향이다. 이 원판의 속도를 $v\mathbf{n}$으로 쓰고, 운동량 보존(conservation of momentum)(벡터 방정식이다)을 이용해 다른 원판의 속도를 구한 다음, 운동 에너지 보존(conservation of kinetic energy)으로 v를 결정한다. 그러면 소문항 (ii)는 에너지 방정식 하나만 더 세우면 되고, 부등식(inequality)은 코사인 값이 1 이하여야 한다는 조건에서 나온다.

풀이

원판들을 매끄러운 수평면 위의 매끄러운 입자로 모형화한다. 즉 원판들 사이에도, 원판과 면 사이에도 마찰이 없다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{n}$ 사이의 각을 θ라 하고 $u = |\mathbf{u}|$로 쓰면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$이다.



충돌하는 순간 중심선(점선)은 $\mathbf{n}$ 방향을 향하며, $\mathbf{u}$의 방향(작은 점선)과 각 θ를 이룬다. 그림은 개략적인 것일 뿐이며, 식을 전개하는 데에는 필요하지 않다.

소문항 (i)

질량이 μm인 원판은 처음에 정지해 있고, 충돌하는 동안 이 원판에 작용하는 수평 방향의 힘은 다른 원판이 주는 접촉력(contact force)뿐이며, 이 힘은 중심선을 따라 작용한다. 이 원판은 $\mathbf{n}$ 방향으로 움직이기 시작하므로, 충돌 후의 속도는 어떤 속력 $v > 0$에 대하여 $v\mathbf{n}$이다.

충돌 후 질량이 m인 원판의 속도를 $\mathbf{w}$라 하자. 운동량 보존에 의해

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

충돌은 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌이므로 운동 에너지가 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$을 이용하면

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

이를 대입하고 $\frac{1}{2}m$과 u^2을 소거하면

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}).$$

그런데 $\mu > 0$이고, 충돌당한 원판은 실제로 움직이므로 $v \neq 0$이다. 따라서 μv로 나눌 수 있고,

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

이것이 구하는 속력이다. 덤으로 $v > 0$으로부터 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$임을 알 수 있으므로 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이다.

> ? **생각해 보기** 여기서 왜 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)이 필요하지 않을까?

그 법칙을 써도 된다. $e = 1$이면 $\mathbf{n}$ 방향의 상대 속도(relative velocity) 성분(component)은 부호가 반대로 바뀌고, 원판이 매끄러우므로 $\mathbf{n}$에 수직인 성분은 변하지 않는다. 그러나 "완전 탄성"이란 운동 에너지가 보존된다는 뜻이고, 이 스칼라 방정식 하나와 운동량만으로 이미 v가 결정된다. 위의 풀이는 이와 정확히 동치이며, 성분으로 나누는 과정을 피할 수 있다.

소문항 (ii)

충돌 후의 전체 운동 에너지는 처음의 $\frac{1}{2}mu^2$과 같다. 두 원판이 이를 똑같이 나누어 가지면 각각 $\frac{1}{4}mu^2$을 가지므로, 충돌당한 원판에 대하여

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$와 함께 소문항 (i)을 이용하면 $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$이므로

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

(소문항 (i)의 끝부분에서) $\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

이러한 각이 존재하려면 $\cos\theta \le 1$, 즉 $\cos^2\theta \le 1$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 &\iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad\qquad (\text{양변에} 8\mu > 0\text{을 곱함})\\ &\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.\end{aligned}$$

이차식(quadratic) $\mu^2 - 6\mu + 1$의 근(root)은 $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$이고, 이 이차식은 두 근 사이에서 정확히 음수이거나 0이다. 따라서

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

이므로 증명이 끝난다. (하한은 $3 - \sqrt{8} \approx 0.172$로 양수이므로 $\mu > 0$과 모순되지 않는다.) 역으로, 이 범위에 있는 모든 μ에 대하여 위의 식은 $(0, 1]$에 속하는 올바른 코사인 값을 주므로, 에너지를 똑같이 나누는 것이 실제로 가능하다. 범위의 양 끝에서는 $\theta = 0$으로, 정면 충돌(head-on collision)이 된다.

검산

- 정면 충돌인 경우: $\mathbf{n}$이 $\mathbf{u}$와 평행하면 소문항 (i)에서 $v = 2u/(1+\mu)$를 얻는데, 이는 익숙한 일차원 탄성 충돌의 결과이다. $\mu = 1$이면 $v = u$가 되어, 스누커(snooker)에서처럼 움직이던 원판은 멈추고 자신의 운동을 모두 넘겨준다.
- 질량이 같은 경우, $\mu = 1$: 소문항 (ii)에서 $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$이므로 $\theta = 45°$이다. 이는 질량이 같은 매끄러운 원판들이 탄성 충돌한 뒤 서로 직각을 이루며 움직인다는 고전적인 사실과 맞아떨어진다. 이때 에너지가 같으면 두 속력이 같아야 하므로, 각 원판은 $\mathbf{u}$와 $45°$를 이룬다.
- 수치적으로, 무작위로 생성한 매끄러운 탄성 충돌 10 000개($\mathbf{n}$ 방향의 충격량(impulse))를 시뮬레이션하여 운동량과 에너지의 보존 및 소문항 (i)의 속력을 확인하였고, 0.172와 5.83 사이의 μ에 대하여 소문항 (ii)에서 구한 각에서 운동 에너지가 같아짐을 확인하였다. 예를 들어 $\mu = 0.1$이면 $\cos^2\theta = 1.51 > 1$이 되어 불가능하다.

흔한 실수

- $\mathbf{u}$와 $\mathbf{n}$을 평행한 것으로 취급하는 것. 이 충돌은 비스듬한 충돌(oblique collision)이며, 중심선 방향의 성분 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$만 전달된다.
- v가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 v로 나누는 것($v = 0$은 에너지 방정식의 "충돌이 없는 경우" 해이다).
- $\cos\theta$에 대하여 음의 제곱근을 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

충돌당한 입자의 속도를 충격량 방향으로 쓰고 운동량과 에너지를 이용하는 이 방법은 물리학에서 탄성 산란(elastic scattering)의 핵심이다. 이는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 가장 깔끔한데, 이 좌표계에서 탄성 충돌은 두 속도의 크기는 바꾸지 않고 방향만 회전시킨다. 그러면 소문항 (ii)의 각의 범위는 실험실 좌표계(lab frame)에서 어떤 각에 도달할 수 있는지에 대한 명제가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 좌표계에서의 충돌을 매우 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.