풀이

STEP III 2000, 문제 8

순수수학 • 점화식

> **STEP III 2000, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q8

핵심 아이디어

정의하는 규칙이 비선형(non-linear)이고 나눗셈을 포함하므로 직접 다루기가 까다롭다. 요령은 이것을 곱의 꼴 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$로 다시 쓰는 것이다. 이 식은 연속한 세 항으로 만든 어떤 조합이 항상 1이라는 뜻이다. 같은 사실을 한 단계 뒤에 대해서도 쓰고 두 식을 빼면 비선형 규칙이 선형(linear) 규칙으로 바뀐다. 점화식(recurrence)이 선형이 되면, 일반항(closed form)은 이제 점화식을 푸는 표준적인 방법으로 구할 수 있다. 특성이차방정식(auxiliary quadratic)의 근을 구한 다음, 두 초깃값을 맞추면 된다.

풀이

예비 단계: 수열이 잘 정의됨

각 단계에서 a_{n-2}로 나누므로, 0인 항이 없음을 확인해야 한다. 사실 모든 항은 양수이다. $a_0 = a_1 = 1 > 0$이다. a_{n-1}과 a_{n-2}가 양수이면 $1 + a_{n-1}^2 > 0$이고 $a_{n-2} > 0$이므로 $a_n > 0$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $a_n > 0$이다. 처음 몇 항은 다음과 같다.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

선형 점화식

정의의 양변에 a_{n-2}를 곱하면, 모든 $n \geq 2$에 대하여 다음을 얻는다.

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \qquad (*)$$

$P(k)$를 명제 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$라 하자. k에 대한 귀납법으로 모든 $k \geq 2$에 대하여 $P(k)$를 증명한다.

기저 단계(base case). $a_2 = 2$이고 $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$이므로 $P(2)$는 참이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 2$에 대하여 $P(k)$가 참이라고 가정하자. 즉,

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}.$$

$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$임을 보여야 한다. 정의에 의해 $a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$이다. 핵심은 분자의 거추장스러운 1을 $n = k$일 때의 $(*)$, 즉 $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$을 이용하여 바꾸는 것이다.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\
&= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\
&= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{귀납 가정} P(k) \\
&= 3a_k - a_{k-1} && \text{왜냐하면} a_{k-1} > 0.
\end{aligned}$$

따라서 $P(k+1)$은 참이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대하여 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$이다.

> **생각해 보기** 귀납 가정(inductive hypothesis)은 어디에서 쓰였는가? 그리고 $n = k$일 때의 $(*)$를 써도 되는 이유는 무엇인가?

귀납 가정은 $a_k + a_{k-2}$를 $3a_{k-1}$로 바꿀 때 한 번 쓰였다. 그 괄호는 1을 $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$으로 바꾸었기 때문에 나타난 것이다. $(*)$를 쓰는 데에는 가정이 전혀 필요 없다. 이것은 a_k의 정의를 곱해서 풀어 쓴 것일 뿐이며, 모든 $k \geq 2$에 대하여 성립한다. 다시 말해, 양 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$은 모든 단계에서 같은 값이며, 바로 이것이 선형 관계를 다음 단계로 넘겨 준다.

일반항

$\beta = \alpha^{-1}$이라 하자. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

그러므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

이므로 α^2과 β^2은 우리 점화식의 특성방정식(auxiliary equation) $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근이다. (구체적으로 쓰면 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.)

이제 $n \geq 1$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

b_n이 a_n과 처음 두 항이 같고 같은 점화식을 만족함을 확인하여 $b_n = a_n$임을 보인다.

점화식을 만족한다. x가 $x^2 = 3x - 1$의 근이면, 양변에 x^{n-2}를 곱하여 $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$를 얻는다. ($\alpha\beta = 1$을 이용하면) $\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$이므로, $x = \alpha^2$으로 놓고 β를 곱하면

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

같은 방법으로 $x = \beta^2$으로 놓고 α를 곱하면 $\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$를 얻는다. 두 식을 더하고 $\sqrt{5}$로 나누면

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

초깃값이 일치한다.

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

결론. (a_n)과 (b_n)은 모두 $n \geq 3$에 대하여 $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$를 만족하고, $n = 1$과 $n = 2$에서 일치한다. 이런 점화식은 각 항을 바로 앞의 두 항으로부터 결정하므로, (강한) 귀납법(strong induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $a_n = b_n$이다. 즉,

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

이므로 증명이 끝났다.

? **생각해 보기** 왜 비교를 $n = 0$이 아니라 $n = 1$부터 시작하는가?

$n = 3$일 때 a_n에 대한 선형 점화식에는 a_2와 a_1이 들어가므로, $n \geq 1$에 대해서는 b_1과 b_2만 맞추면 충분하다. 사실 이 공식은 $n = 0$에서도 성립한다. $b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$이다. 따라서 어느 쪽을 택하든 잃는 것은 없다.

검산

- 항들은 $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$이며, 이는 피보나치 수(Fibonacci numbers) $F_1, F_3, F_5, \ldots$이다($a_0 = 1 = F_{-1}$로 본다). 각 항은 바로 앞 항의 세 배에서 그 앞 항을 뺀 것이다: $3 \cdot 13 - 5 = 34$.
- $(*)$를 직접 확인하면: $34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$.

- 수치적으로 $a_{10} = 4181$이고 $(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$이다. 항 $\alpha^{-19}/\sqrt{5}$는 아주 작으므로, a_n은 $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수이다.
- 원래 규칙으로 $n = 39$까지 수열을 정확히 계산하면, 매번 선형 점화식을 만족하는 정수가 나오며 일반항과도 일치한다.

흔한 실수

- $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$를 $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$에 대입하고 전개하여 $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$을 증명하려는 것. 이렇게 하면 식만 지저분해진다. 1은 한 단계 앞의 정의를 이용하여 바꾸어야 한다.
- 정의에서 a_{n-2}로 나눈다는 사실을 잊는 것. 완전한 답안이라면 항들이 양수이므로 나눗셈과 마지막에 a_{k-1}을 약분하는 것이 정당하다는 점을 밝혀야 한다.
- b_n이 점화식을 만족하는지만 확인하고 초깃값 **두** 개를 맞추지 않는 것. 이계 점화식에는 두 초깃값이 모두 필요하다.

STEP 너머

상수 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$은 피보나치 수에 대한 카시니(Cassini) 항등식(Cassini's identity) $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$의 한 예이다. 여기서는 홀수 번째 항만 나타나므로 부호는 항상 $+1$이다. 더 일반적으로, 임의의 선형 이계 점화식에 대하여 $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$은 각 단계마다 일정한 비율로 변한다(이것은 2×2 행렬식(determinant)이고, 행렬식은 곱셈적이기 때문이다). 이 수열처럼 놀랍게도 항상 정수를 만들어 내는 유리 점화식은 "소모스 수열(Somos sequences)"과 로랑 현상(Laurent phenomenon)의 연구와 관련이 있다. 피보나치형 수열과 연분수(continued fractions)의 정수론(number theory)에 대해서는(α가 황금비(golden ratio)라는 점에 주목하라) Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 읽기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.