풀이

STEP III 2000, 문제 7

순수수학 • 부등식과 극한

STEP III 2000, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q7

핵심 아이디어

두 부등식 모두 곱을 이미 잘 알고 있는 대상과 비교하는 데서 나온다. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\frac{1}{r!}$과 꼭 닮았지만 그보다 조금 작은 항들이 나온다. 곱 $\mathrm{P}(n)$에 대해서는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 쓰면 n개 인수의 곱이 그 평균의 n제곱으로 바뀐다. 인수는 $1+\frac{1}{2^k}$이고, 그 평균은 $1+\frac{1}{n}$보다 조금 작으므로 곧바로 첫 번째 부분과 이어진다.

풀이

부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

이항정리에 의해

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

두 번째 분수는 r개 인수의 곱

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

이고, $0 \le j \le r-1 \le n-1$이므로 각 인수는 $(0,1]$에 속한다. 따라서 이 곱은 1 이하이고, 전개식의 모든 항은 $\frac{1}{r!}$ 이하이다. 그러므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

이다. 여기서 마지막 부등식이 등호 없이 성립하는 것은 빠진 항 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \ldots$이 모두 양수이기 때문이다. 이는 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

부등식 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

$\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$, $a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$로 쓰자. a_k는 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식을 쓸 수 있다. 산술평균(arithmetic mean)은

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1-2^{-n}}{n},$$

이다. 이는 등비급수(geometric series)의 합 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$을 이용한 것이다. $1 - 2^{-n} < 1$이므로 이 평균은 $1 + \frac{1}{n}$보다 엄격히 작다. 따라서 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \le 1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

양변이 모두 양수이므로 n제곱해도 부등식은 유지된다.

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

두 번째 부등식에는 첫 번째 부분의 결과를 썼다. 이는 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

생각해 보기 등호 없는 부등식은 어디에서 나오는가? 산술-기하 평균 부등식은 $\le$만 준다.

등호 없는 부등식은 산술-기하 평균 부등식이 아니라 $1 - 2^{-n} < 1$에서 나온다. 사실 $n \ge 2$이면 인수 a_k가 모두 다르므로 산술-기하 평균 부등식 자체도 등호 없이 성립한다. 그러나 $n = 1$이면 인수가 하나뿐이어서 산술-기하 평균 부등식은 등식($\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$)이 된다. 단계 $1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$은 모든 경우에 등호 없이 성립하므로, 이 논증은 모든 n을 다룬다.

극한

각 인수 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$은 1보다 크므로 $\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$이다. 따라서 수열 $\mathrm{P}(n)$은 순증가하고, 위로 e에 의해 유계(bounded above)이다. 위로 유계인 증가수열은 수렴(converge)하므로, $\mathrm{P}(n)$은 어떤 극한(limit) L로 간다.

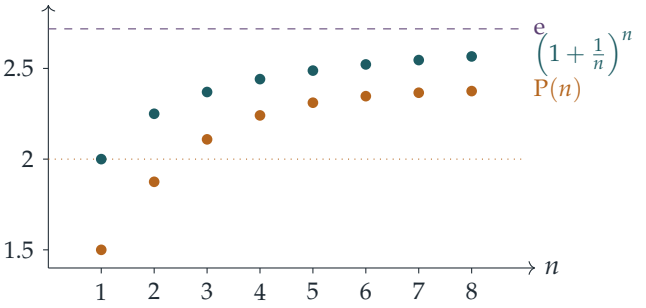
상계: 모든 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$이므로 극한은 $L \le \mathrm{e}$를 만족한다. (극한을 취하면 등호를 포함한 부등식만 보존되므로 $<$가 아니라 $\le$를 얻는다.)

하계를 위해 몇 개의 항을 계산하자.

$$\mathrm{P}(1) = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{P}(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \mathrm{P}(3) = \frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{135}{64} > \frac{128}{64} = 2.$$

수열이 증가하므로 $L \ge \mathrm{P}(4) > \mathrm{P}(3) > 2$이다. 이를 종합하면

$$2 < L \le \mathrm{e}.$$



검산

- $n=1$: $(1+1)^1 = 2 < \mathrm{e}$이고 $\mathrm{P}(1) = 1.5 < 2$이다. $n=4$일 때: $\mathrm{P}(4) = \frac{2295}{1024} \approx 2.241 < \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.441$.
- 곱을 수치로 계산하면 $\mathrm{P}(n)$은 $L \approx 2.3842$에 자리 잡는다($n=60$이면 소수점 아래 여러 자리까지 변하지 않는다). 이는 2와 $\mathrm{e} \approx 2.7183$ 사이에 넉넉히 들어간다.

흔한 실수

- 각 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$라는 이유만으로 $L < \mathrm{e}$라고 주장하는 것. 등호 없는 부등식도 극한에서는 등식이 될 수 있으므로 $L \leq \mathrm{e}$만 따라 나온다. (여기서는 실제로 $L < \mathrm{e}$가 참이지만, 이를 보이려면 별도의 논증이 필요하다.)
- 어떤 n에 대해 $\mathrm{P}(n) > 2$임을 보이고는 수열이 증가한다는 사실을 말하지 않는 것. 바로 이 사실이 그 하계를 L에 전달한다.
- a_k가 양수인지 확인하지 않고 산술-기하 평균 부등식을 적용하는 것.

STEP 너머

"증가하고 위로 유계이므로 수렴한다"는 단계는 단조수렴정리(monotone convergence theorem)이며, 이는 실수의 완비성(completeness)과 동치이다. 이를 기본 원리에서부터 증명하는 것은 대학 해석학(analysis) 강의에서 가장 먼저 하는 일 가운데 하나이다. 로그를 취하면 $\mathrm{P}(n)$은 급수 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$로 바뀌고, 이 급수는 $\sum 2^{-k}$와의 비교에 의해 수렴한다. 이것이 무한곱(infinite product)을 다루는 표준적인 방법이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 두 아이디어를 모두 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.