풀이

STEP III 2000, 문제 6

순수수학 • 사차다항식의 인수분해

> **STEP III 2000, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q6

핵심 아이디어

계수를 비교하면 인수분해(factorisation)는 p, q, r와 a, b, c를 잇는 세 방정식이 된다. a만의 방정식을 얻으려면 b와 c를 소거해야 하는데, 항등식 $4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$가 정확히 이 일을 해 준다. $b+c$와 $b-c$가 자연스럽게 나타나는 조합이기 때문이다. 마지막 사차식에서는 먼저 y^3 항을 없애야 하는데, 평행이동 $y = x + k$로 이를 할 수 있다.

풀이

p, q, r 구하기

우변을 전개하면

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + a(b-c)x + bc,$$

이고, 여기서 x^3 항 $ax^3 - ax^3$은 상쇄된다. 계수를 비교하면

$$p = b + c - a^2, \qquad q = a(b-c), \qquad r = bc.$$

a^2에 대한 삼차방정식

$u = a^2$이라 하자. 첫째 식에서 $b + c = p + u$이다.

$a \neq 0$이면 둘째 식에서 $b - c = q/a$이므로 $(b-c)^2 = q^2/u$이다. 이제

$$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4r = (p+u)^2 - \frac{q^2}{u}.$$

양변에 $u \neq 0$을 곱하면

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

이므로 $u = a^2$은 근이다.

$a = 0$이면 $q = a(b-c) = 0$이고, 이때 삼차식의 모든 항이 $u = 0$에서 0이 되므로 $u = a^2 = 0$은 근이다. 따라서 어느 경우든 a^2은 근이며, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** p, q, r가 무엇이든 $u \geq 0$인 근이 반드시 존재하는 이유는 무엇인가?

이 삼차식을 $f(u)$라 하자. $u = 0$에서 $f(0) = -q^2 \leq 0$이고, 최고차항이 u^3이므로 $u \to +\infty$일 때 $f(u) \to +\infty$이다. $q = 0$이면 $u = 0$ 자체가 근이다. 그렇지 않으면 $f(0) < 0$이고 충분히 큰 어떤 U에 대해 $f(U) > 0$이므로, f가 연속이라는 사실과 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 0과 U 사이에 근이 존재한다. 어느 경우든 음이 아닌 근이 있다.

이것이 중요한 까닭은 $a = \sqrt{u}$가 실수여야 하기 때문이다. 음이 아닌 근은 언제나 실수 a를 주므로, x^3 항이 없는 모든 실계수 사차식은 주어진 꼴의 두 실계수 이차식으로 분해될 수 있다. ($u > 0$이면 $b + c = p + u$와 $b - c = q/\sqrt{u}$로부터 b와 c를 구할 수 있다.)

$p = -1, q = -6, r = 15$인 경우

이때 $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$이므로 삼차방정식은

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

$u = 9$를 대입하면 $729 - 162 - 531 - 36 = 0$이므로 $u = 9$는 근이다. (나누면 $(u-9)(u^2 + 7u + 4)$가 되고, 이 이차 인수는 두 음의 근을 가지므로 $u = 9$가 유일한 음이 아닌 근이다.)

사차식 인수분해하기

주어진 사차식에는 y^3 항이 있으므로 평행이동하여 이를 없앤다. 근의 합이 8이므로 근의 평균은 2이고, $y = x + 2$로 놓는다. 각 항을 전개하면

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16,\\ -8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64,\\ 23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92,\\ -34(x+2) &= -34x - 68,\end{aligned}$$

이고, 이들과 39를 더하면

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

이것이 바로 $p = -1, q = -6, r = 15$인 경우이며, 그래서 앞에서 이 경우가 등장한 것이다.

$u = a^2 = 9, a = 3$으로 잡자. 그러면

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

이므로 $b=3, c=5$이다. 검산하면 $bc=15=r$이다. 따라서

$$x^4-x^2-6x+15=(x^2-3x+3)(x^2+3x+5).$$

마지막으로 $x=y-2$를 대입하면

$$x^2-3x+3=(y^2-4y+4)-(3y-6)+3=y^2-7y+13,$$
$$x^2+3x+5=(y^2-4y+4)+(3y-6)+5=y^2-y+3.$$

그러므로

$$y^4-8y^3+23y^2-34y+39=(y^2-7y+13)(y^2-y+3).$$

대신 $a=-3$으로 잡으면 b와 c가 서로 바뀌어, 같은 두 인수가 순서만 바뀐 채로 나온다.

검산

- 답을 전개하면 $(y^2-7y+13)(y^2-y+3)=y^4-8y^3+(3+7+13)y^2-(21+13)y+39$로 일치한다.
- $y=1$을 대입하면 사차식은 $1-8+23-34+39=21$이고, 인수들은 $7\times 3=21$을 준다.
- 두 이차 인수의 판별식(discriminant)이 모두 음수(-3과 -11)이므로 어느 것도 실수 범위에서 더 분해되지 않으며, 사차식은 실근을 갖지 않는다. 이는 $y=1$에서 양수 값이 나온 것과 맞아떨어진다.

또한 a,b,c를 무작위 유리수로 2000번 골라 p,q,r에 대한 공식과 삼차방정식을 확인했고, 무작위 (p,q,r) 2000개에 대해 이분법으로 음이 아닌 근을 찾았다.

흔한 실수

- $a=0$인 경우를 다루지 않고 a로 나누어 $b-c=q/a$를 얻는 것.
- "삼차방정식은 언제나 실근을 갖는다"고 논증하는 것. 이는 참이지만 그 근이 음이 아님을 보여 주지는 못한다. 핵심은 $f(0)=-q^2$의 부호이다.
- 마지막에 x에서 y로 되돌려 대입하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 본질적으로 일반 사차방정식을 푸는 데카르트(Descartes)의 (그리고 페라리(Ferrari)의) 방법이다. 삼차항을 평행이동으로 없앤 다음, 보조 삼차방정식인 **분해**

삼차방정식(*resolvent cubic*)을 풀어 두 이차식으로 인수분해한다. 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano)의 공식과 함께 쓰면, 모든 사차방정식이 거듭제곱근으로 풀린다(solvable by radicals)는 것을 알 수 있다. 왜 이것이 사차에서 멈추고 일반 오차방정식에는 그런 공식이 없는지가 바로 갈루아 이론(Galois theory)의 주제이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.