풀이

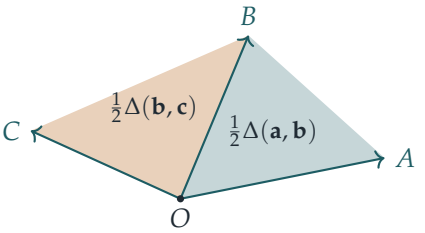
STEP III 2000, 문제 5

순수수학 • 선형 변환

> **STEP III 2000, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q5

핵심 아이디어

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 열로 하는 행렬의 행렬식(determinant)이므로, 삼각형 OAB의 부호 있는 넓이(signed area)의 두 배이다. 또한 이 값은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행(parallel)하지 않을 때, 그리고 그때에만 0이 아니다. 선형사상(linear map)은 이러한 넓이를 모두 같은 배율, 곧 자신의 행렬식만큼 곱한다. 이 사실 하나로 필요성(necessity)은 곧바로 얻어진다. 충분성(sufficiency)의 경우, (ii)의 항등식(identity)은 Δ 값들만을 사용하여 $\mathbf{c}$를 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$로 나타낸다. 따라서 A와 B에 의해 $\mathbf{M}$이 정해지고 나면, C가 어디로 가는지는 달리 선택의 여지가 없다.



풀이

이 풀이 전체에서 $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 열로 하는 2×2 행렬을 나타낸다. 그러면

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

영벡터가 아닌 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에 대하여, $\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$인 것은 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행할 때, 그리고 그때에만이다. 행렬식은 한 열이 다른 열의 상수배일 때, 정확히 그때에만 0이 되기 때문이다. 따라서 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$, $\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$, $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$, $\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$의 여섯 값은 모두 0이 아니다.

앞으로 되풀이해서 쓰이는 사실이 두 가지 더 있다. (열마다 계산하면) $\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \mathbf{Mv}]$이고 행렬식은 곱을 곱으로 보내므로

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \qquad (*)$$

또한 $\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$이다.

소문항 (i)

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$이고 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$여야 하며, 이 둘을 합치면

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않으므로 $\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$이다. 따라서 $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$는 가역(invertible)이고,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

가 조건을 만족한다. 사실 오른쪽에 역행렬을 곱할 수 있으므로, 이 $\mathbf{M}$이 그러한 **유일한** 행렬이다. 양변의 행렬식을 취하면 $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$이고, 이는 0이 아니다.

소문항 (ii): 항등식

좌변의 첫째 성분을 계산하면

$$\begin{aligned}&(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_1 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)b_1 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_1 \\ &\quad = a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 = 0,\end{aligned}$$

이다. 여섯 항이 둘씩 짝지어 소거되기 때문이다. 둘째 성분은 Δ 바깥에 있는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 아래첨자를 모두 1에서 2로 바꾼 같은 계산이다.

$$\begin{aligned}&(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)b_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_2 \\ &\quad = a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 = 0.\end{aligned}$$

따라서

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\,\mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

이 되어 요구된 식이 성립한다. 이 항등식은 **임의의** 세 벡터에 대하여 성립하므로 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$에 대해서도 성립한다.

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,\mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\,\mathbf{p} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

? **생각해 보기** 비율 조건을 식으로 쓰면 정확히 무엇을 말하는가?

Δ 값이 모두 0이 아니므로, 조건 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 는 다음을 만족하는 하나의 수 $k \neq 0$가 존재한다는 뜻이다.

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = k\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = k\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = k\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}). \tag{3}$$

말로 하면, 세 삼각형 OPQ, OQR, ORP의 부호 있는 넓이는 각각 OAB, OBC, OCA의 넓이를 모두 같은 배율로 늘인 것이다.

소문항 (ii): 필요성

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}, \mathbf{Mb} = \mathbf{q}, \mathbf{Mc} = \mathbf{r}$라고 하자. $(*)$에 의하여

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

이것은 $k = \det\mathbf{M}$인 경우의 (3)이며, $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$이므로 $k \neq 0$이다. 따라서 비율이 같다.

소문항 (ii): 충분성

이제 어떤 $k \neq 0$에 대하여 (3)이 성립한다고 하자. 소문항 (i)에 의하여 $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$이고 $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$인 행렬 $\mathbf{M}$이 존재한다. 이제 바로 이 $\mathbf{M}$이 $\mathbf{c}$도 $\mathbf{r}$로 보낸다는 것을 보여야 한다.

(1)에 $\mathbf{M}$을 적용한다. 행렬의 곱셈은 선형이고 Δ 값들은 단지 수일 뿐이므로

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

양변에 k를 곱하고 각 항에 (3)을 적용하면

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

(2)에 의하여 우변은 $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$와 같다. 따라서

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

이고, ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$가 평행하지 않으므로) $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$이기 때문에 $\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$이다. 그러므로 P, Q, R는 $\mathbf{M}$에 의한 A, B, C의 상이다.

필요성과 충분성을 합하면, 비율 조건이 필요충분조건(necessary and sufficient condition)임이 증명된다.

검산

- $\mathbf{a} = \binom{1}{0}$, $\mathbf{b} = \binom{0}{1}$, $\mathbf{c} = \binom{1}{1}$로 놓아 보자. 그러면 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$, $\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) = -1$, $\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = -1$이고, (1)은 $\binom{1}{1} - \binom{0}{1} - \binom{1}{0} = \mathbf{0}$가 된다. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$로 놓으면 $\mathbf{p} = \binom{2}{0}$, $\mathbf{q} = \binom{1}{3}$, $\mathbf{r} = \binom{3}{3}$이고, 세 Δ 값은 $6, -6, -6$이다. 다시 비율 $1 : -1 : -1$이 나오며, $k = 6 = \det\mathbf{M}$이다.

- 수치적으로, 정확한 분수 계산을 사용하여 무작위 정수 벡터 세 쌍 20,000개에 대해 항등식을 검사하였다. 어느 두 벡터도 평행하지 않은 약 17,700개의 세 쌍에 대해서는 소문항 (i)의 방법으로 $\mathbf{M}$을 만들어 필요성을 확인하였고, $\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$가 (3)이 성립할 때, 그리고 그때에만 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- Δ 값이 0이 아니라는 말 없이 비율 조건을 분수로 이루어진 하나의 등식으로 쓰는 것. 어느 두 벡터도 평행하지 않다는 가정은 바로 모든 나눗셈을 정당하게 만들기 위해 있는 것이다.
- 필요성만 증명하는 것. 진짜 핵심은 충분성이다. 행렬은 일차독립인 두 벡터에 대한 작용으로 결정되므로, 조건이 셋째 벡터의 상을 강제해야 한다.
- Δ 안의 순서 때문에 생기는 부호 실수. $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})$이므로 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 다음에 $\mathbf{c}, \mathbf{a}$로 이어지는 순환 순서가 중요하다.

STEP 너머

항등식 (1)은 모습을 바꾼 크라메르 공식(Cramer's rule)이다. 이 항등식은 기저(basis) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$에 대한 $\mathbf{c}$의 좌표를 행렬식의 비로 나타낸다. 선형사상이 모든 부호 있는 넓이를 $\det \mathbf{M}$배 한다는 사실 $(*)$은 행렬식의 기하학적 정의이며, 이중적분(double integral)의 변수변환(change of variables)에서 나타나는 야코비안(Jacobian) 인수의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 두 아이디어를 모두 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.