풀이

STEP III 2000, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 그래프 그리기

> **STEP III 2000, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q4

핵심 아이디어

$f(x) = x + c$로 놓고 분모를 없애면 삼차(cubic) 항이 소거되어 x에 대한 이차식(*quadratic*)만 남는다. 그러면 직선이 곡선과 만나는지는 판별식(discriminant)의 부호에 달려 있게 되는데, 그 판별식 자체가 c에 대한 이차식이므로 판별식의 판별식을 구하게 된다. 그래프를 그릴 때는 f를 일차 부분과 부분분수(partial fractions)로 나누면 필요한 모든 것을 알 수 있다. 곧 점근선(asymptote), 곡선이 점근선의 어느 쪽에 놓이는지, 그리고 곡선이 사점근선(oblique asymptote)과 만나는 위치이다.

풀이

직선과 곡선이 만나는 곳

$x \neq \pm 1$일 때 방정식 $f(x) = x + c$는 다음과 동치이다.

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

전개하면 $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$이다. x^3 항이 소거되어 다음이 남는다.

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

따라서 직선이 곡선과 만나는 것은 $(*)$가 $x = \pm 1$이 아닌 실근을 가질 때와 정확히 같다.

> ? **생각해 보기** $(*)$의 근이 제외된 값 $x = \pm 1$ 중 하나일 수 있을까?

대입하면 $q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1 - a$이고 $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$이다. 둘 다 c에 의존하지 않으므로, $x = 1$이 근이 되는 것은 $a = 1$일 때뿐이고

$x = -1$이 근이 되는 것은 $a = -1$일 때뿐이다. $|a| \neq 1$이면 $(*)$의 모든 실근은 실제 교점을 준다.

$a + 2 + c = 0$인 경우. 이때 $(*)$는 일차식(linear)이다: $-(2a+1)x + (a+2) = 0$. $|a| > 1$이면 $2a + 1 \neq 0$이므로 근 $x = \frac{a+2}{2a+1}$이 존재한다.

$a + 2 + c \neq 0$인 경우. 이때 $(*)$는 진짜 이차방정식이며 판별식은 다음과 같다.

$$D(c) = (2a+1)^2 + 4c(a+2+c) = 4c^2 + 4(a+2)c + (2a+1)^2.$$

D를 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 c에 대한 이차식으로 생각하자. 그 판별식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 16(a+2)^2 - 16(2a+1)^2 &= 16[(a+2) - (2a+1)][(a+2) + (2a+1)] \\ &= 16(1-a) \cdot 3(1+a) = 48(1-a^2). \end{aligned}$$

$|a| > 1$이면 이 값은 음수이므로 모든 c에 대하여 $D(c) > 0$이다. 그러면 $(*)$는 서로 다른 두 실근을 가지며, 어느 것도 ± 1과 같지 않다. 일차식인 경우와 합치면, 모든 c에 대하여 직선 $y = x + c$는 곡선과 만난다.

$|a| = 1$이면 모든 c에 대하여 $D(c) \geq 0$이므로 $(*)$는 여전히 항상 실근을 가지며, 이것이 주장의 대수적 내용이다. 그러나 이 경우에는 곡선 자체가 퇴화한다. 인수 하나가 약분되어 곡선은 한 점이 빠진 쌍곡선(hyperbola)이 된다. 예를 들어 $a = 1$이면 $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+1}$ $(x \neq 1)$이고, 직선 $y = x - 3$ (이 곡선의 점근선)은 곡선과 만나지 않는다. $(*)$에서 이는 $c = -3$인 경우로, 이때 유일한 근은 제외된 값 $x = 1$이다. 따라서 $|a| = 1$이면 이러한 예외적인 c 값을 제외하고 명제가 성립하며, $|a| > 1$이면 예외 없이 성립한다.

$|a| < 1$이면 이차식 $D(c)$는 두 실근을 가지며 두 근 사이에서 음수이다. 구체적인 선택으로 두 근의 중점인 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$를 잡으면 다음과 같다.

$$D(-\tfrac{1}{2}(a+2)) = (a+2)^2 - 2(a+2)^2 + (2a+1)^2 = 3(a^2-1) < 0.$$

이 c에 대하여 $a + 2 + c = \frac{1}{2}(a+2) \neq 0$ ($a > -1$이므로)이므로, $(*)$는 판별식이 음수인 진짜 이차방정식이 되어 실근을 갖지 않는다. 따라서 요구한 대로 직선 $y = x - \frac{1}{2}(a+2)$는 곡선과 만나지 않는다.

사점근선

$x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$를 $x^2 - 1$로 나누면 다음을 얻는다.

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{(2a+1)x - (a+2)}{x^2 - 1}.$$

$x \to \pm\infty$일 때 분수 부분은 0으로 수렴하므로 사점근선은 다음과 같다.

$$y = x - a - 2.$$

그래프를 그리려면 분수를 부분분수로 나누는 것이 도움이 된다.

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{a-1}{2(x-1)} + \frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

이로부터 모든 것을 알 수 있다.

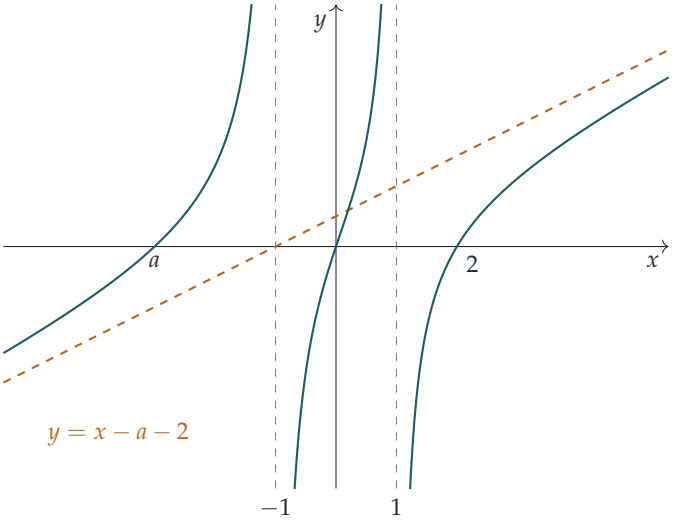
- 영점은 $x = 0,\ 2,\ a$이고, 수직점근선(vertical asymptote)은 $x = \pm 1$이다.
- 곡선은 $(2a+1)x = a+2$인 곳, 곧 $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$에서만 사점근선과 만난다(이것은 다시 $(*)$의 일차식인 경우이다).
- $|x|$가 클 때 차이 $f(x) - (x-a-2)$는 $\frac{2a+1}{x}$처럼 행동한다. 두 경우 모두 $2a+1 < 0$이므로, 곡선은 $x \to +\infty$일 때 점근선의 **아래쪽**에, $x \to -\infty$일 때 점근선의 **위쪽**에 놓인다.
- 계수 $\frac{a-1}{2}$와 $\frac{3(a+1)}{2}$가 $x = 1$과 $x = -1$의 양쪽에서의 행동을 결정한다.

경우 (i): $a < -1$

두 계수가 모두 음수이다: $\frac{a-1}{2} < 0$이고 $\frac{3(a+1)}{2} < 0$. 따라서 $x \to 1^-$ 또는 $x \to -1^-$일 때 $f(x) \to +\infty$이고, $x \to 1^+$ 또는 $x \to -1^+$일 때 $f(x) \to -\infty$이다. 또한

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

인데, 빼는 두 항이 모두 음수이기 때문이다. 따라서 f는 세 갈래 각각에서 증가하며 극점(turning point)은 전혀 없다. 교차점은 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$이고 $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$을 만족하므로 $-1 < x_0 < 1$이다. 곧 곡선은 가운데 갈래에서 점근선과 만난다. 영점은 $a < -1$ (왼쪽 갈래), 0 (가운데), 2 (오른쪽)이다.



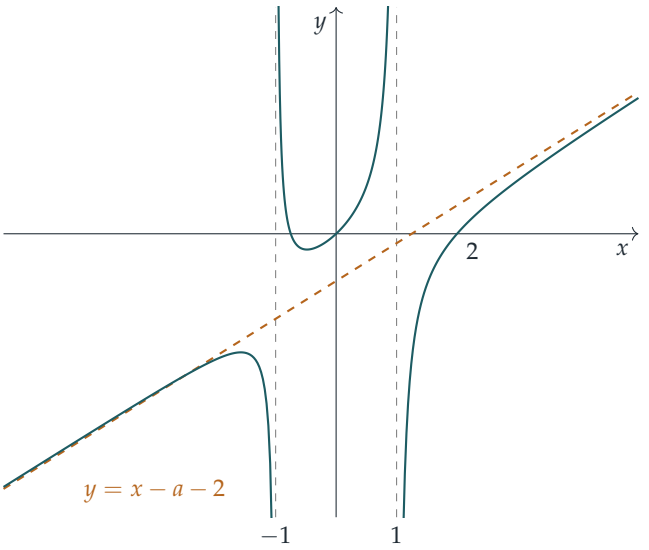
($a = -3$인 경우를 그린 것으로, 이때 점근선은 $y = x + 1$이고 $x_0 = \frac{1}{5}$이다.)

경우 (ii): $-1 < a < -\frac{1}{2}$

이제 $\frac{a-1}{2} < 0$이지만 $\frac{3(a+1)}{2} > 0$이다. $x = 1$ 근처의 행동은 앞에서와 같지만(왼쪽에서 $+\infty$, 오른쪽에서 $-\infty$), $x = -1$ 근처에서는 뒤집힌다. 곧 $x \to -1^-$일 때 $f(x) \to -\infty$이고 $x \to -1^+$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. 이제 $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} < 0$이므로 $x_0 < -1$이다. 곧 교차는 왼쪽 갈래에서 일어난다. 영점 a와 0은 둘 다 $(-1, 0)$에 놓인다.

생각해 보기 극점을 구하라는 요구는 없지만, 극점은 어디에 있어야 할까?

왼쪽 갈래에서 곡선은 점근선 위쪽에서 $-\infty$로부터 올라와 x_0에서 점근선과 만나고, $x \to -1^-$일 때 $-\infty$로 떨어진다. 따라서 극대(maximum)를 갖는다. 이 갈래에는 영점이 없으므로(세 영점이 모두 > -1), 갈래 전체가 x축 아래에 놓인다. 가운데 갈래에서는 양 끝에서 $f \to +\infty$이고, a와 0 사이에서 축 아래로 내려가며 나머지 부분에서는 양수이므로, a와 0 사이에 극소(minimum)가 있다. 오른쪽 갈래에서는 $x > 1$일 때 $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} < 1$이므로 $f'(x) > 0$이다. 곧 곡선은 $-\infty$로부터 올라와 $x = 2$를 지나 아래쪽에서 점근선에 다가간다.



($a = -\frac{3}{4}$인 경우를 그린 것이다: 점근선은 $y = x - \frac{5}{4}$, 교차점은 $x_0 = -\frac{5}{2}$이며, $-\frac{3}{4}$와 0 사이에서 축 아래로 얕게 내려간다.)

검산

- $a = 0, c = -1$ (우리가 선택한 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$)이면 $(*)$는 $x^2 - x + 1 = 0$이 되고, 그 판별식은 -3이다. 예측한 대로 교점이 없다.

- $a = -3$이면 $f(-1.1) \approx 30.9$이고 $f(-0.9) \approx -28.8$이며, 이는 경우 (i)에서 $x \to -1^{\mp}$일 때 구한 부호와 일치한다. $a = -\frac{3}{4}$이면 $f(-1.1) \approx -5.7$이고 $f(-0.9) \approx 2.1$이며, 이는 경우 (ii)의 뒤집힌 행동이다.
- 각 범위에서 여러 a에 대하여 f'의 부호 변화를 수치적으로 세어 보면, 경우 (i)에서는 극점이 없고 경우 (ii)에서는 왼쪽 갈래와 가운데 갈래에 각각 정확히 하나씩 있음이 확인된다.

흔한 실수

- $(*)$의 근 $x = \pm 1$이 교점이 아니라는 사실을 잊는 것. $|a| = 1$일 때 바로 이 부분에서 문제가 생긴다.
- $(*)$가 일차식이 되어 판별식 논법을 쓸 수 없는 경우인 $a + 2 + c = 0$을 무시하는 것.
- 경우 (ii)에서 수직점근선 $x = -1$의 어느 쪽인지를 잘못 판단하는 것. 그곳에서는 $a + 1$의 부호가 그림을 바꾼다.

STEP 너머

$|a| < 1$이면 $D(c)$의 두 근은 곡선에 접하는 직선 $y = x + c$를 주고, 그 사이에 있는 직선들은 곡선과 만나지 않는다. a가 ± 1을 지날 때 이 접선들이 나타나거나 사라지고 곡선의 모양이 바뀐다. 곧 영점 하나가 수직점근선을 지나가고 그 옆에서의 행동이 뒤집힌다. 곡선족의 정성적 모양이 매개변수에 따라 어떻게 변하는지를 연구하는 것이 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이며, 이는 대학 1학년 미분방정식(differential equations) 강의에서 만나게 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라. 이런 종류의 그래프 그리기를 더 연습하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)가 훌륭하다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.