풀이

STEP III 2000, 문제 3

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.6 절 **페르마 점**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/fermat-point.html

핵심 아이디어

아르강 평면(Argand plane)에서 벡터를 60° 회전(rotation)시키는 것은 $\alpha = e^{i\pi/3}$를 곱하는 것과 같다. 따라서 주어진 변 위에 세운 정삼각형(equilateral triangle)의 세 번째 꼭짓점은 한 줄로 적을 수 있다. 그 뒤의 모든 것은 항등식(identity) $1 + \alpha^2 = \alpha$와 $\alpha^3 = -1$ 같은 그 친척들에서 나온다. 이 식들은 꼭짓점의 식을 아주 간단한 꼴로 정리해 주며, 그 꼴이 보이면 마지막 부분은 거의 바로 끝난다.

풀이

항등식

$\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로

$$1 + \alpha^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \alpha.$$

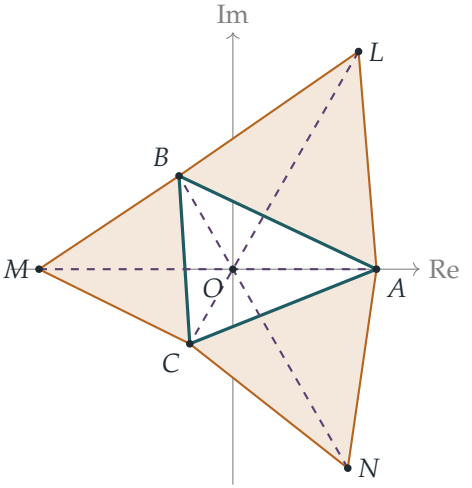
다음 따름 결과들도 사용할 것이다.

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$;
- $1 - \alpha = -\alpha^2$ (항등식을 이항한 것이다);
- $\alpha^2 - \alpha = -1$ (이것도 이항한 것이다);
- $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$이므로 $1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$.

마지막 식은 $1-\alpha$를 곱하면 **시계 방향**으로 60° 회전한다는 뜻이다.

삼각형 ABC

$A = p$는 양의 실수축 위에 있고, $B = q\alpha^2 = q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$는 편각(argument)이 120°인 반직선 위에, $C = -r\alpha = r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$는 편각이 240°인 반직선 위에 있다. 따라서 세 꼭짓점은 O에서 서로 120°씩 떨어진 세 반직선 위에, O로부터 각각 거리 p, q, r인 곳에 놓인다. 원점은 삼각형 내부에 있고, $A \to B \to C$는 **시계 반대 방향**으로 돈다. 아래 그림은 $p = 2$, $q = 1.5$, $r = 1.2$인 경우이며, 바깥에 세운 삼각형들도 함께 나타낸다.



꼭짓점 N, L, M

XYZ가 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이면, X에서 출발해 돌 때 변 XZ는 변 XY를 X를 중심으로 시계 방향으로 60° 돌린 것이다. 따라서

$$Z - X = (Y - X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = (Y - X)(1 - \alpha), \qquad \text{즉} \qquad Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y.$$

? **생각해 보기** 왜 "시계 방향"이면 새 삼각형들이 ABC의 **바깥쪽**에 놓이는가?

$A \to B \to C$가 시계 반대 방향이므로, C는 방향이 있는 변 AB의 왼쪽에 있다. AB를 A를 중심으로 시계 방향으로 돌리면 오른쪽으로 꺾이므로, L은 AB에 대해 C와 반대쪽에 놓인다. 나머지 두 변에서도 마찬가지이며, 이는 그림과 일치한다.

N (CAN이므로 $X = C, Y = A$):

$$N = \alpha(-r\alpha) + (1 - \alpha)p = (1 - \alpha)p - \alpha^2 r,$$

이므로 요구한 결과가 나온다. $1 - \alpha = -\alpha^2$를 쓰면 이 식은 $N = -\alpha^2(p + r)$로 정리된다.

L (삼각형 ABL이므로 $X = A, Y = B$):

$$L = \alpha p + (1-\alpha)q\alpha^2 = \alpha p + q(\alpha^2 - \alpha^3) = \alpha p + q(1+\alpha^2) = (p+q)\alpha,$$

여기서 $\alpha^3 = -1$을 쓴 다음 $1 + \alpha^2 = \alpha$를 썼다.

M (삼각형 BCM이므로 $X = B, Y = C$):

$$M = \alpha \cdot q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r = -(q+r),$$

여기서 $\alpha^3 = -1$과 $\alpha^2 - \alpha = -1$을 썼다.

따라서 주어진 N의 꼴과 같은 방식으로 쓰면

$$L = \alpha p + \alpha q, \qquad M = -q - r, \qquad N = (1-\alpha)p - \alpha^2 r.$$

세 직선

이제 각 점의 쌍을 단위 복소수(unit complex number)의 양수배로 살펴보자.

$$\begin{aligned} L &= (p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C &= -r\alpha = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1), \\ M &= (q+r)\cdot(-1), & A &= p\cdot 1, \\ N &= (p+r)\cdot(-\alpha^2), & B &= q\,\alpha^2. \end{aligned}$$

각 쌍에서 두 점은 어떤 단위 복소수 u(차례로 $u = \alpha$, $u = 1$, $u = \alpha^2$)에 대해 u와 $-u$의 양의 실수배이다. 따라서 두 점은 O를 지나는 한 직선 위에, O를 사이에 두고 **반대쪽**에 놓인다. 그러므로 직선 LC, MA, NB는 모두 원점을 지나며, 실제로 원점은 각 선분 위에 있다. 또 두 점이 O의 반대쪽에 있으므로 각 선분의 길이는 O로부터의 거리의 합이다.

$$LC = (p+q) + r, \qquad MA = (q+r) + p, \qquad NB = (p+r) + q,$$

이 값은 모두 $p + q + r$로 같으므로 요구한 결과가 성립한다.

검산

$p = 1$, $q = 2$, $r = 3$이면 공식에서 $L = 3\alpha \approx 1.5 + 2.598\mathrm{i}$, $M = -5$, $N = -4\alpha^2 \approx 2 - 3.464\mathrm{i}$를 얻는다. $|L - A| = |L - B| = |A - B| = \sqrt{7}$을 계산해 보면 ABL이 정삼각형임이 확인된다. 컴퓨터로 각 삼각형을 $\pm 60^\circ$의 두 회전으로부터 직접 만들고 시계 방향인 것을 택하여, p, q, r를 무작위로 10 000번 골랐을 때 세 공식, O에서의 공점(concurrence), 공통 길이 $p + q + r$가 모두 성립함을 확인했다. 멋진 특수한 경우로, $p = q = r$이면 삼각형 ABC는 중심이 O인 정삼각형이 되고, 그림은 예상대로 3회 대칭성을 가진다.

흔한 실수

- $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ 대신 α를 곱해 반대 방향으로 회전하는 실수. 그러면 L, M, N이 삼각형 안쪽에 놓이고, 주어진 N의 꼴이 나오지 않는다.
- O가 각 직선 위에 있다는 것만 보이고, 길이를 구하려면 O가 양 끝점 **사이**에 있어야 한다는 점을 잊는 실수. 실수배의 부호가 이를 결정해 준다.

STEP 너머

이것은 나폴레옹(Napoleon) 배치의 특수한 경우이다. **임의의** 삼각형의 각 변 바깥쪽에 정삼각형을 세우면, 직선 AM, BN, CL은 한 점(페르마 점(Fermat point))에서 만나고 그 길이도 모두 같다. 페르마 점은 세 꼭짓점까지의 거리의 합을 최소로 하는 점이며, 여기서는 각 변이 120°의 각을 이루며 보이는 점 O이다. 복소수는 회전을 곱셈으로 바꾸어 주며, 그래서 이런 증명이 짧은 대수 계산이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.