풀이

STEP III 2000, 문제 2

순수수학 • 치환적분

STEP III 2000, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q2

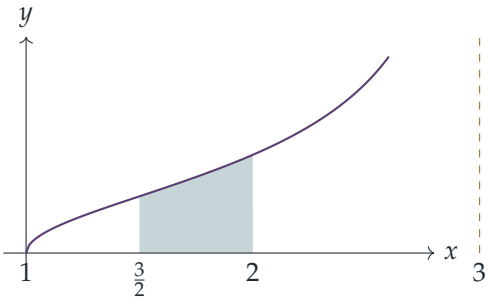
핵심 아이디어

$(x-1)/(3-x)$ 같은 몫의 제곱근을 보면 반각 공식(half-angle formulae)을 떠올려야 한다. $x = 2 - \cos\theta$로 두면 분자는 $1 - \cos\theta$, 분모는 $1 + \cos\theta$가 되고, 그 비는 완전제곱식 $\tan^2\frac{\theta}{2}$이다. 일반적인 결과를 위해 계산을 다시 할 필요는 없다. 일차 변수변환(linear change of variable)으로 a에서 b까지의 구간을 1에서 3까지의 구간으로 옮기면, 일반적인 적분이 첫 번째 적분의 상수배가 된다.

풀이

첫 번째 적분

피적분함수(integrand)는 $1 \le x < 3$에서 정의되고, 적분 구간 $\frac{3}{2} \le x \le 2$는 그 안에 들어 있다. 아래 색칠한 넓이가 우리가 구하려는 적분이다.



$x = 2 - \cos\theta$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. $x = \frac{3}{2}$일 때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고,

$x = 2$일 때 $\cos\theta = 0$이므로 θ의 범위를 $\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지로 잡는다. 그러면

$$x - 1 = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}, \qquad 3 - x = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

이므로

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right| = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

이다. 이 범위에서 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 탄젠트 값이 양수이기 때문이다.

생각해 보기 피적분함수가 $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$가 되었을 때, 탄젠트를 적분하는 일을 어떻게 피할 수 있을까?

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$로 쓰면 코사인이 약분된다.

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta.$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\theta - \sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{6}.\end{aligned}$$

일반적인 적분

첫 번째 적분은 $a = 1$, $b = 3$인 경우로, 이때 $p = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1+3}{2} = 2$이다. 그러므로 $u = 1$을 $x = a$로, $u = 3$을 $x = b$로 보내는 일차 치환을 찾는다.

$$x = a + \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

그러면

$$x - a = \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad b - x = (b-a) - \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1) = \tfrac{1}{2}(b-a)(3-u),$$

이고, $b - a \neq 0$이므로 공통인수가 약분된다.

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{u-1}{3-u}.$$

적분 구간의 끝을 보자. $u = \frac{3}{2}$이면 $x = a + \frac{1}{4}(b-a) = \frac{3a+b}{4} = p$이고, $u = 2$이면 $x = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2} = q$이다. $b - a > 0$이므로 이 치환은 증가함수이고, 따라서 적분

구간의 끝의 순서가 그대로 유지된다. 그러므로 첫 번째 결과를 이용하면

$$\int_p^q \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{3/2}^2 \left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u$$
$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{6} = \frac{(b-a)(\pi+3\sqrt{3}-6)}{12},$$

이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

(같은 방법으로, $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$로 바로 치환해도 된다. 이때도 적분 구간의 끝은 $\frac{\pi}{3}$와 $\frac{\pi}{2}$이고, 계산 과정은 인수 $\frac{b-a}{2}$가 더 붙는 것만 빼면 똑같다.)

검산

- 수치적으로 $\frac{1}{6}(\pi+3\sqrt{3}-6) \approx 0.38962$이다. 원래의 피적분함수에 $[\frac{3}{2}, 2]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 같은 값이 나온다.
- 타당성: 피적분함수는 길이가 $\frac{1}{2}$인 구간에서 $\sqrt{1/3} \approx 0.577$부터 1까지 증가하므로, 넓이는 대략 0.29와 0.5 사이에 있어야 한다. 실제로 그렇다.
- 일반 공식은 음수 a를 포함하여 무작위로 고른 $a < b$ 20쌍에 대해 심프슨 공식의 결과와 일치했다.
- 척도 변환: 구간 $[a, b]$를 k배로 늘이면 피적분함수의 값들은 변하지 않지만 $[p, q]$는 k배로 늘어난다. 따라서 답은 $b-a$에 비례해야 하고, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$를 빠뜨리고 $\tan\frac{\theta}{2}$만을 θ에 대하여 적분하려 한다.
- 적분 구간의 끝을 $\theta = -\frac{\pi}{3}$이나 $\frac{5\pi}{3}$로 잡는다. 어떻게 잡든 θ가 $\sin\theta > 0$이고 $\tan\frac{\theta}{2} > 0$인 범위를 지나며 $\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가하도록 해야 한다.
- 일반적인 경우에 $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}(b-a)$를 빠뜨려 분모에 12 대신 6이 나온다.

STEP 너머

두 번째 부분은 정적분(definite integral)이 아핀 변수변환(affine change of variable)에 따라 예측 가능한 방식으로 변한다는 것을 보여 준다. 이 때문에 이와 같은 양은 a와 b에 오직 길이 $b-a$를 통해서만 의존한다. 피적분함수 자체는 베타 함수(beta function) 꼴의 피적분함수이다. 전체 구간에서 $\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$이고, 함수 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$는 확률론과 해석학 곳곳에서 거듭 등장한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률

론 입문)에서는 이를 베타 분포(Beta distribution)의 정규화 상수(normalising constant)로 만나게 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서는 치환 적분법을 엄밀하게 증명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.