풀이

STEP III 2000, 문제 11

역학 • 거친 회전축에 대한 회전

STEP III 2000, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q11

핵심 아이디어

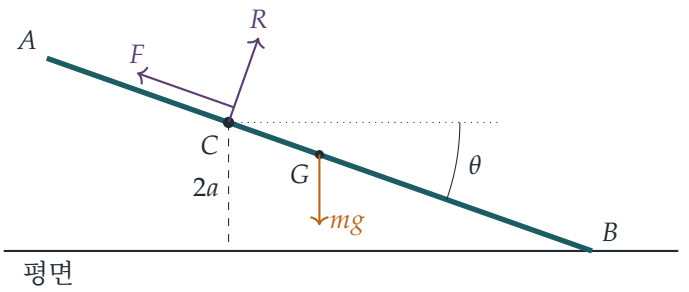
미끄러지지 않는 한, 막대는 들보 위의 점 C를 중심으로 회전할 뿐이므로 고정축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)이다. 에너지로부터 각속도(angular speed)를 얻고, 모멘트 방정식으로부터 각가속도(angular acceleration)를 얻는다. 그다음 질량중심(centre of mass)에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하면, 들보가 제공해야 하는 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 알 수 있다. 마찰력이 수직항력의 μ배 이하로 유지되는 동안에는 미끄러지지 않으며, 이 조건이 B가 평면에 닿을 때까지 줄곧 성립해야 한다.

풀이

모형과 기하

막대를 균일한 강체 막대로, 들보를 고정된 가늘고 거친 직선으로 모형화한다. 그러면 들보는 C에서 하나의 접촉력을 작용하는데, 이는 막대에 수직인 수직항력 R와 막대 방향의 마찰력 F로 이루어진다.

질량중심 G는 중점이며 A에서 $4.5a$만큼 떨어져 있다. $AC = 3a$이므로 G는 C에 대해 B 쪽에 있고 $CG = \frac{3}{2}a$이며, $CB = 6a$이다. 따라서 무게는 C에 대한 모멘트를 가지고, 막대는 B가 내려가는 방향으로 기운다. 막대가 회전한 각을 θ라 하면, 막대는 수평선과 각 θ를 이룬다.



B는 $2a$만큼 내려갔을 때, 즉 $6a\sin\theta = 2a$일 때 평면에 닿는다. 곧

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

C를 중심으로 한 회전

평행축 정리(parallel axes theorem)에 의해 C에 대한 관성모멘트(moment of inertia)는

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

이다. 미끄러지지 않는 동안 C는 고정되어 있으므로 접촉력은 일을 하지 않는다. G는 $\frac{3}{2}a\sin\theta$만큼 내려갔으므로, (정지 상태에서 출발한다고 하고) 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot\theta^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

C에 대한 모멘트를 취하면 (무게만 모멘트를 가진다)

$$9ma^2\,\ddot\theta = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

(에너지 방정식을 t에 대해 미분해도 같은 결과를 얻으며, 이는 유용한 검산이 된다.)

접촉력

G는 C를 중심으로 반지름 $\frac{3}{2}a$인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 막대를 따라 C를 향하는 성분 $\frac{3}{2}a\dot\theta^2$와, 막대에 수직이며 θ가 증가하는 방향(막대를 가로질러 아래쪽)의 성분 $\frac{3}{2}a\ddot\theta$를 가진다.

> **생각해 보기** 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가? 그리고 왜 단순히 $mg\sin\theta$가 아닌가?

무게의 막대 방향 아래쪽 성분 $mg\sin\theta$는 막대를 B 쪽으로 들보에서 끌어내리려 한다. 게다가 G에는 C를 향하는 구심력(centripetal force)이 필요하다. 이 둘을 모두 마찰력이 제공해

야 하므로, 마찰력은 막대를 따라 위쪽, 즉 A 쪽으로 작용한다. G의 가속도에 대해 C를 향하는 방향을 양으로 잡고 막대 방향으로 분해하면

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot{\theta}^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

이므로

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

G가 가속되는 방향으로 막대에 수직하게 분해하면

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

이므로

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

이다. 이 값은 내내 양수이므로 막대는 들보와 접촉한 상태를 유지한다.

미끄러지지 않을 조건

$F \le \mu R$인 한 막대는 C에서 미끄러지지 않는다. 즉

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

비 $2\tan\theta$는 놓는 순간 0에서 출발하여 θ와 함께 증가하므로, 이 조건은 마지막 순간, 곧 B가 평면에 닿는 순간에 가장 만족하기 어렵다. 그때 $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$이므로

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

이어야 한다. 따라서 μ의 최솟값은

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

이다. 정확히 이 값일 때 마찰력은 B가 평면에 부딪히는 순간에만 한계에 이르며, 이보다 작은 μ에 대해서는 그 전에 미끄러지기 시작한다.

검산

- 놓는 순간 $\dot{\theta} = 0$이므로 $F = 0$이고 $R = \frac{3}{4}mg$이다. G가 $\frac{3}{2}a\ddot{\theta} = \frac{1}{4}g$로 아래쪽으로 가속되기 시작하므로 들보는 전체 무게보다 적은 힘을 떠받친다. 이것이 익숙한 "놓은 판자는 가볍게 느껴진다" 효과이다.
- 단위: F와 R는 모두 mg의 배수이고, μ는 당연히 무차원량이다.

- 방정식 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$를 정지 상태에서 출발하여 수치적으로 풀고, 유한 차분으로 G의 가속도를 계산한 뒤, 뉴턴의 제2법칙으로 F와 R를 복원하였다. 그 결과는 $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ 및 $\frac{3}{4}mg\cos\theta$와 일치하며, F/R는 $\sin\theta = \frac{1}{3}$일 때 $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$까지 꾸준히 증가한다.

흔한 실수

- 중심에 대한 모멘트를 취하거나 평행축 항을 빠뜨리는 것: $I_C = 9ma^2$이지, $\frac{27}{4}ma^2$가 아니다.
- 문제를 정역학으로 취급하여 $F = mg\sin\theta$, $R = mg\cos\theta$로 두는 것. 그러면 $\mu \geq \tan\theta$가 된다. G의 구심 가속도와 접선 가속도가 모두 힘을 바꾼다.
- 마찰 조건을 가장 까다로운 지점이 아니라 $F = 0$인 놓는 순간에서만 확인하는 것.

STEP 너머

이 문제는 구속력(constraint force)이 있는 강체 동역학을 처음 맛보게 해 준다. 에너지와 모멘트로 운동을 구한 다음에야, 질량중심에 대한 뉴턴의 법칙을 이용해 거꾸로 구속이 제공해야 하는 힘을 구하였다. 같은 방식(운동을 구한 다음, 구속이 필요한 힘을 실제로 제공할 수 있는지 확인하기)으로 사다리가 언제 미끄러지기 시작하는지, 쓰러지는 연필이 언제 탁자에서 떨어지는지, 구슬이 언제 철사에서 벗어나는지를 판단한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축 회전과, 돌림힘과 질량중심의 운동 사이의 관계를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.