풀이

STEP III 2000, 문제 10

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

STEP III 2000, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q10

핵심 아이디어

기하에서 시작한다. 거리 $\sqrt{3}a$와 a는 보가 특별한 각도로 지면과 만나도록 정해진 것이고, 이 각도가 문제의 모든 방향을 결정한다. 그다음 미지의 힘이 사라지는 두 점에 대해 모멘트(moment)를 잡는다. 경첩(hinge) X에 대해 잡으면, 보의 식에는 구가 주는 수직항력(normal reaction)만 남는다. 구가 주는 마찰력(friction)은 보 자체를 따라 작용하기 때문이다. 구의 중심에 대해 잡으면, 두 마찰력을 제외한 모든 힘이 중심을 지나므로 두 마찰력은 같아야 한다.

풀이

모형과 기하

보는 균일한 막대로, 구는 무게가 중심 C에 작용하는 균일한 강체(rigid body)로 본다. 두 접촉면은 모두 거칠다. 구가 지면에 닿는 점을 O라 하면 $OX = \sqrt{3}\,a$, $OC = a$이고 OC는 연직이다.

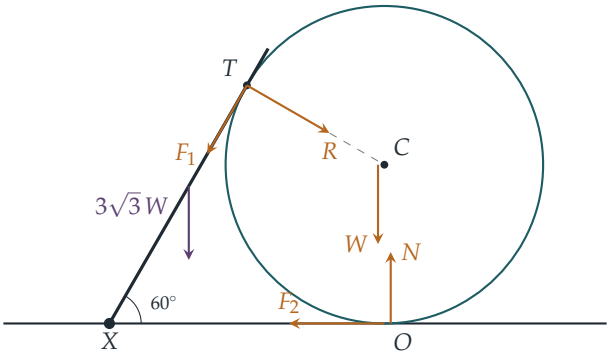
보는 점 T에서 구에 닿으며, 그 점에서 구에 접한다. 지면은 X에서 그은 또 하나의 접선(tangent)이다. 직각삼각형 XOC에서

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{따라서} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

X에서 그은 두 접선은 직선 XC에 대해 대칭이므로, 보는 지면과 $2 \times 30^\circ = 60^\circ$의 각을 이룬다. 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $XT = XO = \sqrt{3}\,a$이다. $\sqrt{3}\,a < 2a$이므로 접점은 실제로 보 위에 있으며, 보의 중점을 조금 지난 곳에 있다.

반지름 CT는 보에 수직이다. 따라서 T에서의 수직항력은 수평과 30°를 이루고, T에서의 마

찰력은 보를 따라 수평과 $60°$를 이루며 작용한다.



호박색 화살표는 구에 작용하는 힘이다. 보는 R와 F_1을 반대 방향으로 받으며, 이와 함께 중점(즉 X로부터 거리 a인 점)에 작용하는 무게 $3\sqrt{3}\,W$와 경첩에서의 미지의 반작용을 받는다.

마찰력의 방향은 추측한 것이다. 구에 대해 F_1은 보를 따라 X 쪽으로 내려가는 방향으로, F_2는 지면을 따라 X 쪽으로 작용한다고 두었다. 추측이 틀렸다면 그 힘은 음수로 나올 것이다.

보: X에 대한 모멘트

경첩의 반작용은 X에 작용하므로 X에 대한 모멘트가 없다. 구가 주는 마찰력은 보를 따라 작용하고, 보의 직선은 X를 지나므로 이 힘 역시 모멘트가 없다. 수직항력 R는 거리 $XT = \sqrt{3}\,a$인 점에서 보에 수직으로 작용한다. 무게는 X로부터 수평 거리 $a\cos 60° = \frac{1}{2}a$인 곳에 작용한다. 따라서

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{따라서} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

구: C에 대한 모멘트

힘 R, W, N은 모두 C를 지난다. (수직항력은 반지름 방향으로 작용한다.) 두 마찰력은 접선 방향이며, 각각 C로부터 거리 a인 곳에 작용한다. T에서의 F_1은 구를 C에 대해 한쪽으로 돌리고, O에서의 F_2는 반대쪽으로 돌리므로

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{따라서} \qquad F_1 = F_2.$$

이 공통의 값을 F라 하자.

? **생각해 보기** 두 마찰력에 대해 다른 아무것도 모르는 상태에서, 왜 두 마찰력이 같다고 확신할 수 있는가?

구는 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 어느 점에 대해서든 전체 모멘트는 0이다. 중심은 영리한 선택이다. 무게와 두 수직항력이 모두 중심을 지나므로 마찰력만 남고, 두 마찰력의 팔 길이는 a로 같다.

구: 힘의 분해

수평 방향에서 X로부터 멀어지는 쪽을 양의 방향으로 잡자. R의 성분은 $R\cos 30^\circ$, F_1의 성분은 $-F\cos 60^\circ$이고, F_2는 $-F$를 준다. 따라서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{따라서} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

이 값은 양수이므로 추측한 마찰력의 방향이 옳았다. 연직 방향에서 R는 성분 $R\sin 30^\circ$로 아래로 밀고, F_1은 성분 $F\sin 60^\circ$로 아래로 당긴다. 따라서

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

마찰 계수

구는 두 접촉점 모두에서 막 미끄러지려는 상태이므로, 두 곳 모두 마찰이 한계 마찰(limiting friction)이다. 즉 $F_1 = \mu_1 R$, $F_2 = \mu_2 N$이다. 그러므로 마찰 계수(coefficient of friction)는

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

검산

- 좌표를 이용한 수치 검산($a = 1.3$, $W = 2$)으로 T가 구 위에 있고 CT가 보에 수직임을 확인했다. 구의 세 평형 방정식을 직접 풀면 $R = 1.5W$, $F_1 = F_2 \approx 0.8660W$, $N = 2.5W$를 얻으므로 $\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$, $\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$이다.
- 독립적인 방정식: 구에 대해 O에 관한 모멘트를 잡는다. 이번에는 N, F_2, W의 모멘트가 없다. R의 작용선은 C를 지나므로, 그 모멘트는 높이 a에서의 수평 성분의 모멘트, 즉 $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$와 같다. O에 대한 F_1의 모멘트를 계산하면 $\frac{3}{2}aF$가 된다. 두 값을 같게 놓으면 C에 대한 모멘트 방정식을 쓰지 않고도 다시 $F = R/\sqrt{3}$을 얻는다.
- 두 계수 모두 1보다 작으며, 이는 일반적인 거친 접촉면으로서 물리적으로 타당하다.

흔한 실수

- 보의 각도를 60°가 아니라 30°(XC의 각도)로 잡는 실수.

- N을 구할 때 F_1의 연직 성분을 빠뜨리는 실수. 이러면 $N = \frac{7}{4}W$가 되어 μ_2가 틀리게 나온다.
- 구가 주는 마찰력을 X에 대한 보의 모멘트 방정식에 포함하는 실수. 이 힘은 보를 따라 작용하므로 X에 대한 모멘트가 0이다.

STEP 너머

평면 위의 강체는 자유도(degrees of freedom)가 3이므로, 서로 독립인 평형 방정식 세 개를 준다. 여기서 구에는 미지의 접촉력이 다섯 개 있고, 보가 R를 알려 주어 그 수를 줄인다. 그러면 두 "한계 마찰" 조건이 문제를 풀 수 있는 연립방정식으로 바꾸어 준다. 이처럼 방정식의 개수와 미지수의 개수를 세어 보고, 계가 정역학적으로 부정정(statically indeterminate)인 때를 알아보는 것이 구조역학(structural mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학(statics)과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.