풀이

STEP III 2000, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선의 접선

> **STEP III 2000, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q1

핵심 아이디어

두 곡선은 모두 원점을 중심으로 하는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이고, 둘 다 반회전(half-turn) $(x, y) \mapsto (-x, -y)$에 대하여 변하지 않는다. 이 대칭성 덕분에 Q는 저절로 얻어진다. 접선(tangent)에 대해서는 연립방정식을 무작정 푸는 대신, 제시된 점이 두 직선 위에 모두 있음을 $ab = 1$과 $a^2 - b^2 = 2$라는 두 사실을 이용해 **확인**하는 것이 깔끔한 요령이다. 네 점을 구하고 나면, 원점을 중심으로 하는 4분의 1 회전이 정사각형이 되는 이유를 설명해 준다.

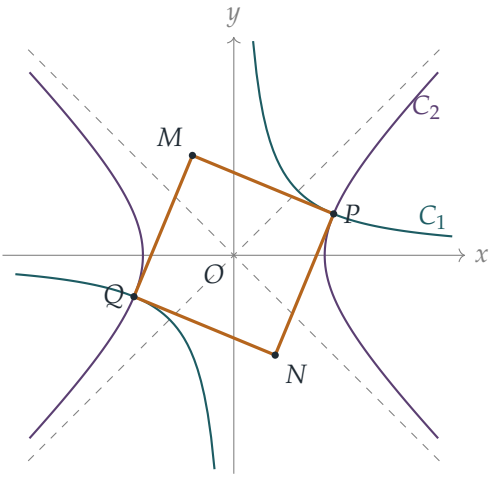
풀이

개형 그리기

C_1, 즉 $xy = 1$은 제1사분면과 제3사분면에 놓인 익숙한 직각쌍곡선이며, 좌표축을 점근선(asymptote)으로 가진다.

C_2, 즉 $x^2 - y^2 = 2$는 x축과 $(\pm\sqrt{2}, 0)$에서 만나고 y축과는 만나지 않는다(만나려면 $-y^2 = 2$이어야 한다). $y^2 = x^2 - 2$로 쓰면 $|y| < |x|$이고 $|x|$가 클 때 $y \approx \pm x$임을 알 수 있으므로, 점근선은 $y = \pm x$이다. 이 곡선은 C_1을 원점을 중심으로 45° 회전시킨(그리고 $\sqrt{2}$배 확대한) 것이며, 두 가지가 왼쪽과 오른쪽으로 열려 있다.

두 곡선은 어디에서 만나는가? $xy = 1 > 0$이므로 공통점은 모두 제1사분면 또는 제3사분면에 있다. $y = 1/x$를 C_2에 대입하면 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$이므로 $x^2 = 1 + \sqrt{2}$이다(다른 근 $1 - \sqrt{2}$는 음수이다). 따라서 교점은 정확히 두 개이고, 두 사분면에 하나씩 있다.



그림에서 C_1은 청록색, C_2는 자주색이며, 점선은 C_2의 점근선 $y = \pm x$이다. 호박색 정사각형 $PMQN$이 지금부터 구하려는 것이다.

점 Q

(x, y)를 $(-x, -y)$로 바꾸어도 xy와 $x^2 - y^2$는 모두 변하지 않는다. 따라서 (a, b)가 두 곡선 위에 있으면 $(-a, -b)$도 두 곡선 위에 있다. 교점은 두 개뿐이므로

$$Q = (-a, -b).$$

앞으로 계속 P가 두 곡선 위에 있다는 두 사실을 이용한다.

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

접선

C_1에 대하여, $xy = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, C_1 위의 점 (p, q)에서의 기울기(gradient)는 $-q/p$이다. 그 점에서의 접선은 $p(y - q) = -q(x - p)$, 즉

$$qx + py = 2pq = 2.$$

C_2에 대하여, $x^2 - y^2 = 2$를 미분하면 $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, (p, q)에서의 기울기는 p/q이다. 접선은 $q(y - q) = p(x - p)$, 즉

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

(두 식은 기울기가 수직인 점에서도 성립한다. 이 식들은 곡선의 기울기 벡터와 (x, y)의 내적일 뿐이기 때문이다.) $P = (a, b)$와 $Q = (-a, -b)$를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\text{곡선} C_1\text{의 접선, 접점} P: &\quad bx + ay = 2,\\
\text{곡선} C_2\text{의 접선, 접점} Q: &\quad -ax + by = 2,\\
\text{곡선} C_2\text{의 접선, 접점} P: &\quad ax - by = 2,\\
\text{곡선} C_1\text{의 접선, 접점} Q: &\quad -bx - ay = 2.
\end{aligned}$$

점 M

M은 처음 두 직선의 교점이다. $(x, y) = (-b, a)$를 대입해 보자.

$$\begin{aligned}
bx + ay &= -b^2 + a^2 = 2,\\
-ax + by &= ab + ab = 2ab = 2.
\end{aligned}$$

따라서 $(-b, a)$는 두 직선 위에 모두 있다. 계수의 행렬식(determinant)이 $b \cdot b - a \cdot (-a) = a^2 + b^2 \neq 0$이므로 두 직선은 평행하지 않고, 따라서 정확히 한 점에서 만난다. 그러므로

$$M = (-b, a),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

> ? **생각해 보기** 주어진 답을 확인하는 것은 직접 구하는 것보다 약한 논증이 아닐까?

여기서는 그렇지 않다. 평행하지 않은 두 직선은 정확히 한 점에서 만나므로, 두 직선 위에 모두 있는 점은 **바로** 그 교점이다. 직접 풀어도 되지만, 그렇게 하더라도 결국 $ab = 1$과 $a^2 - b^2 = 2$를 이용해 답을 정리해야 한다.

점 N

같은 방법으로, N은 $ax - by = 2$와 $-bx - ay = 2$의 교점이다. 점 $(b, -a)$를 대입하면

$$ab + ab = 2, \qquad -b^2 + a^2 = 2,$$

이고, 행렬식은 $a(-a) - (-b)(-b) = -(a^2 + b^2) \neq 0$이다. 따라서

$$N = (b, -a).$$

$PMQN$은 정사각형이다

네 위치 벡터(position vector)를 살펴보자.

$$P = (a, b), \quad M = (-b, a), \quad Q = (-a, -b), \quad N = (b, -a).$$

O를 중심으로 시계 반대 방향으로 90° 회전하면 (x, y)는 $(-y, x)$로 옮겨진다. 따라서 이 회전은 $P \to M \to Q \to N \to P$로 옮긴다. 이것만으로도 답이 짐작되지만, 직접적인 논증을 해 보자.

- 대각선 PQ와 MN의 중점이 모두 O이므로 두 대각선은 서로를 이등분하고, $PMQN$은 평행사변형(parallelogram)이다.
- 두 대각선의 길이는 모두 $2\sqrt{a^2+b^2}$이므로 같고, 따라서 이 평행사변형은 직사각형이다.
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$이므로 두 대각선은 수직이고, 따라서 이 직사각형은 마름모(rhombus)이다.

직사각형이면서 마름모인 사각형은 정사각형이다. 꼭짓점의 순서도 올바르다. P, M, Q, N은 O를 중심으로 4분의 1 회전씩 차례로 놓여 있으므로, $PMQN$은 스스로 교차하지 않고 정사각형의 둘레를 따라 돈다. 따라서 $PMQN$은 정사각형이다. ■

한 변의 길이의 제곱은 $|PM|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$이다. $a^2 = 1+\sqrt{2}$, $b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2}-1$이므로 이 값은 $4\sqrt{2}$이다.

검산

- 수치로 계산하면 $a = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$, $b \approx 0.6436$이다. 접선들의 교점을 수치적으로 구하면 주장한 대로 $M \approx (-0.6436, 1.5538)$, $N \approx (0.6436, -1.5538)$이다. 네 변의 길이는 모두 $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$이고, 이웃한 변은 서로 수직이다.
- P의 각은 $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2}-1) = 22.5°$로, C_1의 점근선 $y = 0$과 C_2의 점근선 $y = x$의 정확히 중간이다. 따라서 정사각형은 개형 그림에서 보듯이 22.5°만큼 기울어져 있다.

흔한 실수

- C_2의 접선을 $px + qy = 2$로 쓰는 것. 빼기 부호가 중요하며, 바로 이 부호 덕분에 계산이 맞아떨어진다.
- 반사 대칭을 짐작하여 $Q = (b, a)$ 또는 $(-b, -a)$로 잡는 것. 직선 $y = x$에 대한 반사는 C_1을 보존하지만 C_2는 보존하지 않는다. 두 곡선을 모두 보존하는 것은 O를 중심으로 하는 반회전뿐이다.
- 네 변의 길이가 같다는 것만 보이는 것. 그것으로는 마름모일 뿐이고, 직각(또는 대각선의 길이가 같음)도 보여야 한다.

STEP 너머

우리가 사용한 접선 공식 $qx + py = 2$와 $px - qy = 2$는, 원뿔곡선(conic) $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ 위의 점 $\mathbf{p}$에서의 접선이 $\mathbf{p}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$라는 일반 규칙의 예이다. 대학 1학년의 이차형식(quadratic form) 강의에서는 회전을 이용해 A를 대각화(diagonalise)하는 법을 배우는데, 바로 이것이 $xy = 1$과 $x^2 - y^2 = 2$가 45° 회전시킨 같은 곡선인 이유이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식과 회전을 명료하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 형식의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.