풀이

STEP II 2000, 문제 9

역학 • 공기 저항을 받는 운동

STEP II 2000, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

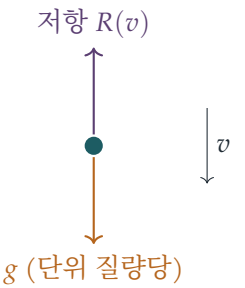
step.maths.org/questions/00-s2-q9

핵심 아이디어

두 낙하자는 모두 속력에만 의존하는 저항을 받으며 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 따른다. 따라서 v와 t에 대한 일계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 된다. "속력이 결코 도달할 수 없다"는 결과는 종단 속력(terminal speed), 즉 저항이 중력과 정확히 균형을 이루는 속력에서 나온다. 해는 이 값을 향해 서서히 다가가지만 유한한 시간 안에는 결코 도달하지 않는다. Karen의 경우에는 무차원(dimensionless) 속력 $u = kv/g$로 나타내면 이차식이 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

각 낙하자를 정지 상태에서 연직으로 떨어지는 입자로 모형화하고, 중력 가속도 g는 아래쪽으로 일정하다고 한다. 아래쪽 방향의 속력을 $v \geq 0$으로 두고, t는 뛰어내린 순간부터 잰다. 단위 질량당 작용하는 힘은 아래쪽으로 중력 g, 위쪽으로 공기 저항이므로, 뉴턴의 제2법칙에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g -$ (단위 질량당 저항)이다.



Jane의 속력의 상한

Jane의 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

처음에는 $v = 0 < g/k$이다. $v < g/k$인 동안에는 $g/k - v > 0$으로 나눌 수 있으므로 변수를 분리하면

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

이고, 따라서

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

이 식은 모든 $t \geq 0$에서 성립한다. 우변이 모든 유한한 t에 대해 g/k보다 작으며, 이것이 바로 나눗셈에 사용한 조건이기 때문이다. $\mathrm{e}^{-kt} > 0$이므로 모든 t에 대해 $v < g/k$이다. 따라서 Jane의 속력은 $t \to \infty$일 때 g/k로 수렴(converge)하지만 결코 그 값에 도달하지 않는다.

Karen의 속력의 상한

Karen의 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

무차원 속력 $u = kv/g$를 도입한다. 그러면 우변은

$$g(1 - u - 2u^2) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{그리고} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

가속도는 $u = \frac{1}{2}$일 때 영이 되며(근 $u = -1$은 물리적인 속력이 아니다), 이는 $v = g/(2k)$일 때이다. 이것이 Karen의 종단 속력이다.

처음에는 $u = 0 < \frac{1}{2}$이다. $0 \leq u < \frac{1}{2}$인 동안에는 두 인수가 모두 양수이므로 변수를 분리할 수 있다. 부분분수(partial fractions)로 나타내면

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

이며, 이는 $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$에 $u = -1$과 $u = \frac{1}{2}$를 대입하여 확인할 수 있다. 따라서

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

$\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$을 정리하면

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

앞에서와 같은 이유로 이 식은 모든 $t \geq 0$에서 성립하므로, Karen의 속력은 다음을 만족한다.

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{모든 시각} t.$$

이것이 대응하는 결과이다. 그녀의 속력은 $g/(2k)$에 가까워지지만 결코 그 값에 도달하지 않는다.

Jane이 $g/(3k)$에 도달하는 시간

Jane의 해에 $v = g/(3k)$를 대입하면 $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$이고

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

Karen이 $g/(3k)$에 도달하는 시간

? **생각해 보기** t에 대한 u의 공식이 필요한가, 아니면 더 빠른 방법이 있는가?

더 빠른 방법은 이미 구해 둔 u에 대한 t의 공식을 쓰는 것이다. 속력 $g/(3k)$는 $u = \frac{1}{3}$을 뜻하고, 이는 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 그녀는 이 속력에 실제로 도달한다. 그러면

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

검산

- Karen은 모든 양의 속력에서 Jane보다 더 큰 저항을 받으므로, 같은 속력에 도달하는 데 더 오래 걸려야 한다. 실제로 $\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$는 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$보다 크다.
- t가 작을 때 두 공식 모두 $v \approx gt$를 주는데, 이는 저항이 없는 자유 낙하이므로 마땅히 그래야 한다. $u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$로 전개하면 $v \approx gt$를 얻는다.
- 두 방정식을 정지 상태에서부터 수치적으로 풀어 보았다(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, $g = 9.8$, $k = 0.7$). 속력은 각각 g/k와 $g/(2k)$인 14와 7 아래에 머물렀고, 속력 $g/(3k)$에는 $t \approx 0.5792$와 $t \approx 0.6601$에서 도달하였다. 이 값들은 $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ 및 $\frac{2}{3k} \ln 2$와 약 10^{-9} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 가속도가 양수라는 사실만으로 "속력이 결코 g/k에 도달할 수 없다"고 주장하는 것. 이는 속력이 증가한다는 것을 보여 줄 뿐, 속력이 g/k 아래에 머문다는 것을 보여 주지는

않는다. 명시적인 해를 구하거나, 종단 속력에 도달하는 데 걸리는 시간이 무한하다는 논증이 필요하다.

- $\ln(1-2u)$ 항의 부호를 틀리는 것. $\frac{1}{1-2u}$를 적분하면 $-\frac{1}{2}\ln(1-2u)$이다.

STEP 너머

두 방정식은 모두 자율(autonomous) 방정식, 즉 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$ 꼴이다. 종단 속력은 이러한 방정식의 안정 평형점(stable equilibrium)이다. 상미분방정식(ODE)의 유일성 정리(uniqueness theorem)에 따르면 f가 매끄러울 때 해는 유한한 시간 안에 평형점에 결코 도달할 수 없으며, 이것이 두 상한 뒤에 있는 일반적인 이유이다. Karen의 방정식은 리카티 방정식(Riccati equation)이며, 같은 로지스틱(logistic) 형태의 거동이 개체군 모형에서도 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 자율 방정식과 그 평형점을 다루고, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항을 받는 운동을 논의한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.