풀이

STEP II 2000, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP II 2000, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 변수분리형(separable)이다. 즉 x에 대한 의존성과 y에 대한 의존성이 곱의 꼴로 나타나므로, y가 포함된 것은 모두 한쪽으로, x가 포함된 것은 모두 다른 쪽으로 옮길 수 있다. 각 x 쪽은 $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ 꼴인데, x가 x^2의 도함수(derivative)의 (상수배)이므로 곧바로 적분된다. 소문항 (ii)에서는 $(y+3)$의 거듭제곱 지수를 우리가 정할 수 있으며, y의 증가가 e^{3x^2}과 정확히 맞아떨어지도록 지수를 고른다.

풀이

소문항 (i)

$x=0$에서 $y=6$이므로 시작점 근처에서 $y+3>0$이고, 따라서 $(y+3)^{1/2}$로 나눌 수 있다.

$$(y+3)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$을 이용하여 양변을 x에 대하여 적분하면

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

$x=0, y=6$을 대입하면 $2\cdot 3 = 2 + C$이므로 $C=4$이고

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

우변은 항상 2 이상이므로 정당한 (양의) 제곱근이며, $y+3$은 결코 0에 이르지 않는다. 따라서 위에서 나눈 것은 모든 $x \geq 0$에 대하여 정당하다. 양변을 제곱하면

$$\boxed{y = (2+\mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

$x\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^{-x^2}\to 0$이고 $\mathrm{e}^{-2x^2}\to 0$이므로, 요구한 대로 $y\to 1$이다.

소문항 (ii)

여기서 방정식은 다음과 같다.

$$(y+3)^{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

일반적인 (정수가 아닐 수도 있는) 거듭제곱이 의미를 가지려면 $y+3>0$이어야 한다. 그런데 $x>0$에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$이므로 y는 증가하고, 따라서 $y+3$은 처음에 양수이면 계속 양수로 남는다. $k\neq 0$일 때 적분하면

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{따라서} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

생각해 보기 어떤 k를 시도해야 할까?

$k>0$이면, x가 클 때 상수는 무시할 수 있고 $y+3\approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$이다. y가 e^{3x^2}처럼 증가하기를 원하므로 $6/k=3$, 즉 $k=2$이어야 한다. (다른 어떤 $k>0$에 대해서도 $\mathrm{e}^{-3x^2}y$는 0이나 ∞로 간다.)

그러므로 $k=2$로 잡는다. 그러면 방정식은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$이고, 해는

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

이다. 여기서 $D=(y_0+3)^2-\frac{1}{6}$이고 y_0은 $x=0$에서의 y의 값이다. 우변은 $(y_0+3)^2>0$에서부터 증가하므로 계속 양수이고, 해는 모든 $x\geq 0$에 대하여 존재한다.

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}\; - 3.$$

e^{-3x^2}을 곱하고 $\mathrm{e}^{-3x^2}=\sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$을 근호 안으로 넣으면, $x\to\infty$일 때

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6}+D\,\mathrm{e}^{-6x^2}}\; - \; 3\mathrm{e}^{-3x^2} \;\longrightarrow\; \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

이다. 두 지수함수가 모두 0으로 가기 때문이다. 따라서 $k=2$일 때 극한은

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

이고, 이는 초깃값과 관계없다. 상수 D가 답에서 사라졌으며, 바로 이 때문에 문제에서 "임의의 해"라고 말할 수 있는 것이다.

$k=2$일 때 거듭제곱 $(y+3)^{-1}$은 $y<-3$에서도 의미를 가진다. 그 분지에서는 $y+3=-\sqrt{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}$이고, 같은 논법으로 극한 $-1/\sqrt{6}$을 얻는다. 의도된 답은 $y>-3$인 해에 대한 $1/\sqrt{6}$이다.

검산

- (i)에서 $x = 0$이면 $y = (2+1)^2 - 3 = 6$이고, $y = (2+\mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3$을 미분하면 $-4x\mathrm{e}^{-x^2}(2+\mathrm{e}^{-x^2}) = -4x\mathrm{e}^{-x^2}(y+3)^{1/2}$이다.
- 두 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 보면 공식과 일치한다. 예를 들어 (i)에서 $y(2) \approx 1.07360$이고, (ii)에서 $y_0 = 6$으로 시작하면 $\mathrm{e}^{-12}y(2) \approx 0.408230$으로, 이미 $1/\sqrt{6} \approx 0.408248$에 가깝다.

흔한 실수

- 적분 상수(constant of integration)를 제곱한 뒤에야 붙이거나, 엉뚱한 식에 $y = 6$을 맞추는 것.
- $x\,\mathrm{e}^{6x^2}$을 $\mathrm{e}^{6x^2}/12$가 아니라 $\mathrm{e}^{6x^2}/6$으로 적분하는 것. 이 실수는 k를 바꾸지는 않지만 극한값은 바꾼다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 점근 해석(asymptotic analysis)의 작은 한 조각이다. 증가하는 항이 적분 상수를 압도하기 때문에, 초깃값에 신경 쓰지 않고도 x가 클 때 해가 어떻게 행동하는지 알아낼 수 있었다. 해의 어떤 성질이 초기 조건(initial conditions)과 무관한지를 묻는 것은 미분방정식(differential equations)의 정성적 이론에서 핵심적인 문제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 변수분리형 방정식과 이런 종류의 장기적 거동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.