풀이

STEP II 2000, 문제 7

순수수학 • 직선과 원뿔

STEP II 2000, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s2-q7

핵심 아이디어

무엇보다 먼저 $\mathbf{s}$의 길이를 구한다. $\cos\theta \pm \sqrt{3}$ 항들은 교차항이 상쇄되고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$가 나타나도록 짜여 있으므로, $|\mathbf{s}|$는 θ에 전혀 의존하지 않는다. 그다음부터는 모든 것이 스칼라곱(scalar product)에서 나온다. 조합 $s_x - s_z$ 역시 θ와 무관한데, 이것이 곧바로 m의 방향을 가리키며 마지막 소문항에서 평면 $x - z = \text{constant}$가 등장하는 이유를 설명해 준다.

풀이

l과 일반적인 직선 사이의 각

간단히 $c_\theta = \cos\theta$로 쓴다. $\mathbf{s}$의 길이는

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8, \end{aligned}$$

이다. $\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ 교차항이 상쇄되기 때문이다. 따라서 모든 θ에 대하여 $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$이다.

$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$라 하자. 그러면

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

이다. 따라서 두 직선 사이의 각 ϕ는

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

를 만족한다. 직선에는 정해진 방향이 없으므로, 예각을 원한다면 우변에 절댓값을 취하면 된다.

직선 m

$\cos\phi$가 θ와 무관하도록 하는 방향 $\mathbf{d}$를 찾고자 한다. 분자를 보면, θ에 대한 의존성은 정확히 $a+c=0$이고 $b=0$일 때 사라진다. 그러므로 $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$ ($a=1, b=0, c=-1$)를 시도해 보면

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

이다. 이 값은 양수이므로 ϕ는 이미 예각이고, 모든 θ에 대하여 $\phi=\pi/6$이다. 따라서 원점을 지나는 직선

$$m: \quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

가 요구 조건을 만족한다. θ가 변할 때 l은 축이 m이고 반꼭지각(semi-vertical angle)이 $\pi/6$인 원뿔(cone)을 그린다.

P가 그리는 원

l 위에서 $x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3}))=2\sqrt{3}\,\lambda$이다. 이것을 $4\sqrt{3}$과 같다고 놓으면 θ가 무엇이든 $\lambda=2$이므로

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

이다. 직선 m은 $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$, 즉 $\mu=2\sqrt{3}$인 곳에서 평면과 만나며, 그 교점 C는

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

이다.

? **생각해 보기** 왜 C가 중심의 자연스러운 후보인가?

평면 $x-z=4\sqrt{3}$의 법선(normal)은 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$이고, 이는 m의 방향이다. 따라서 m은 원뿔의 축이면서 평면에 수직이고, 어떤 원뿔이든 축에 수직인 평면으로 자르면 축이 그 평면과 만나는 점을 중심으로 하는 원이 생긴다. 이제 이것을 직접 확인한다.

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k}, \qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

따라서 P의 모든 위치는 평면 위에 있고, 그 평면 위의 고정점 C로부터 거리 $2\sqrt{2}$만큼 떨어져 있다. 다시 말해, P는 평면 위에서 중심이 C이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원 위에 있으며, C는 m 위에 있다.

P가 실제로 원 전체를 그린다는 것을 보이기 위해

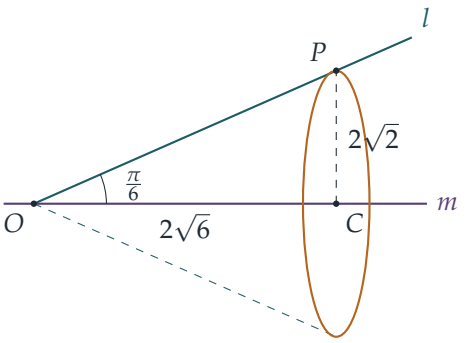
$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}), \quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

로 쓴다. 여기서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 서로 수직인 단위벡터(unit vector)이고, 둘 다 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$에 수직이므로 평면을 따라 놓여 있다. θ가 0부터 2π까지 변할 때 P는 원을 한 바퀴 돈다. 반지름은

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

이다.

반지름을 더 빨리 구하는 방법도 있다. $|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$이고 $|OC| = 2\sqrt{6}$이며 OC가 평면에 수직이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$이다. 같은 말로, $CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$이다.



검산

- $\theta = 0$일 때 $\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$이고, $|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3}) = 8$, $\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$이므로 $\cos\phi = \sqrt{3}/2$이다.
- 반지름을 구하는 두 방법의 결과가 일치한다. $\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$이고 $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 20 000개의 θ (일반 공식에 대해서는 무작위 a, b, c도 함께)에 대하여 m과 이루는 각은 $\pi/6$이고, P는 평면 위에 있으며, $|CP| = 2.8284\ldots$이다. 모두 10^{-15} 이내의 오차로 성립한다.

흔한 실수

- $|\mathbf{s}|$로 나누는 것을 잊거나, $\mathbf{s}$가 단위벡터라고 가정하는 것. 그 길이는 $2\sqrt{2}$이다.
- P가 O를 중심으로 하는 구 위에 있다는 것(즉 $|OP| = 4\sqrt{2}$)만 보이는 것. 구를 평면으로 자르면 원이 생기지만, 그 중심이 왜 m 위의 점 C인지는 여전히 설명해야 한다. 그 이유는 OC가 평면에 수직이기 때문이다.

STEP 너머

직선 l은 원뿔을 그리며, 원뿔을 평면으로 자르는 것에서 원뿔곡선(conic sections)이라는 이름이 유래했다. 축에 수직인 평면으로 자르면 원이 되고, 평면을 기울이면 타원, 포물선, 쌍곡선이 된다. 대학 1학년 과정에서는 이 원뿔을 이차곡면(quadric surface) $(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$로 기술하고, 대칭행렬의 고윳값(eigenvalues)을 이용하여 이러한 곡면을 분류한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이 내용을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.