풀이

STEP II 2000, 문제 6

순수수학 • 반각 치환

> **STEP II 2000, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q6

핵심 아이디어

치환(substitution) $t = \tan\frac{1}{2}\theta$를 쓰면 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수로 바뀌고, 이 문제에서는 그 결과가 2를 이차식으로 나눈 꼴이 된다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 아크탄젠트(arctangent)가 나오고, 첫 부분의 세 번째 항등식(identity)이 바로 위끝에서의 아크탄젠트를 간단히 하는 데 필요한 것이다. 두 번째 적분은 새로 적분할 필요 없이 대칭성(symmetry)을 이용해 첫 번째 적분에서 곧바로 얻는다.

풀이

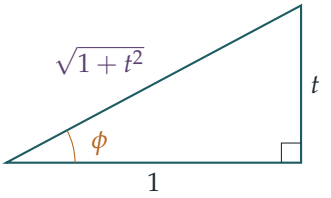
세 항등식

$\phi = \frac{1}{2}\theta$라 하면 $t = \tan\phi$이고 $1 + t^2 = \sec^2\phi$이다. 배각 공식(double-angle formulae)에 의해

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(이 식들은 $\tan\frac{1}{2}\theta$가 정의될 때, 즉 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$일 때 항상 성립한다.) 아래와 같이 두 변이 1과 t이고 한 각이 ϕ인 직각삼각형을 떠올리면 이 식들을 기억하기 쉽다.



세 번째 항등식은 $\sin\theta \neq 0$일 때 $1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$와 $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$를 이용한다.

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \phi) = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta),$$

여각(complementary angles)에 대하여 $\cot\phi = \tan(\frac{1}{2}\pi - \phi)$이기 때문이다. 이로써 세 항등식이 모두 증명되었다.

첫 번째 적분

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$이면 $\theta = 2\arctan t$이므로

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\theta = 0$일 때 $t = 0$이고, $\theta = \frac{1}{2}\pi$일 때 $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다. $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$라 하자. $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 양수이다. 그러면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

완전제곱식으로 고치고 $1-c^2 = s^2$를 이용하면

$$t^2+2ct+1 = (t+c)^2 + s^2.$$

$s > 0$이므로 기본 적분 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$에 의해

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left[\arctan\frac{t+c}{s}\right]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

생각해 보기 $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

바로 여기서 첫 부분이 제 역할을 한다. 세 번째 항등식(θ 대신 α를 넣은 것)에 의해 $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$이다. 그러나 arctan과 tan을 상쇄하기 전에 그 각이 arctan의 치역인 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인해야 한다. $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 실제로

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

마찬가지로 $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$이고 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\Big((\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha) - (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\Big) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 적분

$\theta = \frac{1}{2}\pi - u$로 치환한다. 그러면 $\cos\theta = \sin u$, $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝 $0, \frac{1}{2}\pi$가 서로 바뀌면서 음의 부호가 상쇄된다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

이제 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$라 하자. 그러면 $\sin\alpha = \cos\beta$이고 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$이므로, 방금 증명한 결과를 α 대신 β에 대해 적용할 수 있다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

$\sin\beta = \cos\alpha$이므로, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$일 때 다음을 얻는다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

검산

- $\alpha \to 0$일 때 $\cos\alpha \to 1$이므로 첫 번째 적분은 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$로 수렴해야 한다(치환하면 $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$을 얻는다). 실제로 $\alpha/\sin\alpha \to 1$이다.
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 피적분함수(integrand)는 1로 수렴하므로 첫 번째 적분은 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴해야 하고, 이는 $\frac{\pi/2}{1}$과 일치한다. 두 번째 적분도 마찬가지로 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 1로 수렴하며, 이는 $\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{\cos\alpha} \to 1$과 맞아떨어진다.
- 수치적으로 확인하면, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 첫 번째 적분을 계산하면 1.110721이 나와 $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$과 일치하고, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$일 때 두 번째 적분은 공식이 예측하는 대로 $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$가 된다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta$에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$이나 새로운 적분 구간의 끝 0과 1을 빠뜨리는 것.

- x가 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 $\arctan(\tan x) = x$라고 쓰는 것. 이 문제에서는 조건 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$가 바로 이것을 정당화해 준다.
- 두 번째 적분에서 $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$와 $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$를 이용하지 않고 적분 전체를 처음부터 다시 하는 것.

STEP 너머

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 치환(바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고도 한다)이 잘 통하는 까닭은 점 $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$가 단위원(unit circle)의 유리 매개화(rational parametrisation)이기 때문이다. t에 유리수를 넣으면 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triple)을 얻는다. 대학에서는 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 꼴의 적분을 보통 $z = e^{i\theta}$로 놓고 유수 정리(residue theorem)를 이용해 계산하는데, 그러면 계산이 단위원 안에 있는 극점(pole)을 찾는 문제로 바뀐다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 아이디어를 아름답게 소개하는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.