풀이

STEP II 2000, 문제 4

순수수학 • 편각과 아크탄젠트 항등식

> **STEP II 2000, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q4

핵심 아이디어

처음 두 결과는 복소수를 곱하면 그 편각(argument)이 더해진다는 것을 말한다. 따라서 "아크탄젠트(arctangent)들의 합 $= \pi/4$" 꼴의 항등식은 사실 $5 - \mathrm{i}$와 $1 + \mathrm{i}$ 같은 가우스 정수(Gaussian integers)들의 곱에 관한 명제이다. $a > 0$인 각 인수 $a + b\mathrm{i}$는 각 $\arctan(b/a)$만큼을 기여하고, $\pi/4$는 직선 $y = x$ 위에 있는 수의 편각이다. 해야 할 일은 곱을 조심스럽게 전개한 다음, 두 각이 단지 2π의 배수만큼의 차이를 허용한 채 같은 것이 아니라 정말로 같다는 것을 확인하는 것이다.

풀이

곱셈 공식과 드무아브르 정리

전개하고 $\mathrm{i}^2 = -1$을 이용하면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= \cos(\theta + \phi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \phi),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos(A + B)$와 $\sin(A + B)$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)를 썼다.

두 번째 결과는 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 보인다. $n = 1$일 때 양변은 모두 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이다. $n = k$일 때 결과가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta + \theta),\end{aligned}$$

이다. 여기서 귀납 가정을 쓰고, 이어서 $\phi = k\theta$로 둔 곱셈 공식을 썼다. 따라서 결과는 $n = k+1$일 때도 성립하고, 그러므로 모든 양의 정수 n에 대해 성립한다.

$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 $\operatorname{cis}\theta$로 쓰면 편리하다. 그러면 우리가 보인 것은 $\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$와 $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$이다.

각에 관한 사실

$a > 0$이고 b가 실수이면

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}(\arctan(b/a)),$$

이다. 왜냐하면 각 $\alpha = \arctan(b/a)$는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\cos\alpha > 0$이고, $\tan\alpha = b/a$이기 때문이다. 이 두 조건으로부터 $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$와 $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$가 반드시 성립한다.

또한 $R, R' > 0$이고 $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$이면, 절댓값(modulus)을 취해 $R = R'$을 얻으므로 $\cos S = \cos T$이고 $\sin S = \sin T$이다. 따라서 $S - T$는 2π의 배수이다.

첫 번째 항등식

$\alpha = \arctan\frac{1}{5}$라 하자. 그러면 $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$이고 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$이므로, 위의 결과들에 의해

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha).$$

이다. 한편 직접 전개하면

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

이고, $\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$로 두면 $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$이다. 두 식을 비교하면 $\frac{\pi}{4} - 2\alpha$와 β는 2π의 배수만큼 차이가 난다.

? **생각해 보기** 그 2π의 배수가 0이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 각의 범위를 좁혀 본다. $0 < \frac{1}{5} < 1$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$이다. 또 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이다. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$에 속하는 두 각의 차는 2π보다 작으므로 그 배수는 0이고, $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$이다. 즉

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

두 번째 항등식

같은 아이디어에 따라 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$를 살펴보자. 이 수의 편각이 좌변이 되어야 한다. 단계별로 곱하면

$$\begin{aligned}(4+\mathrm{i})^2 &= 15+8\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3 &= (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52+47\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) &= (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993+992\mathrm{i}.\end{aligned}$$

이다. 이 수는 이미 직선 $y=x$에 매우 가깝고, 마지막 인수가 일을 마무리한다.

$$\begin{aligned}(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i}) &= (993\times 1985-992)+(993+992\times 1985)\mathrm{i}\\ &= 1970113+1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(1985가 어디서 나왔는지 궁금하다면: $(993+992\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$의 실수부와 허수부가 같아지도록 하면 $993a-992=992a+993$이므로 $a=1985$이다.)

이제 $p=\arctan\frac{1}{4}$, $q=\arctan\frac{1}{20}$, $r=\arctan\frac{1}{1985}$라 하자. 각에 관한 사실에 의해 $4+\mathrm{i}$, $20+\mathrm{i}$, $1985+\mathrm{i}$는 각각 $\operatorname{cis}p$, $\operatorname{cis}q$, $\operatorname{cis}r$의 양의 실수배이므로, 그 곱은 $\operatorname{cis}(3p+q+r)$의 양의 실수배이다. 위의 식과 비교하면 $3p+q+r-\frac{\pi}{4}$는 2π의 배수이다.

p,q,r 각각은 그 탄젠트 값이 $(0,1)$에 속하므로 $(0,\frac{\pi}{4})$에 속하고, 따라서 $0<3p+q+r<\frac{5\pi}{4}$이다. 그러므로 $3p+q+r$와 $\frac{\pi}{4}$의 차는 2π보다 작고, 그 배수는 0이며,

$$3\arctan\tfrac{1}{4}+\arctan\tfrac{1}{20}+\arctan\tfrac{1}{1985}=\frac{\pi}{4}.$$

이다.

검산

절댓값이 일치해야 한다. $|34+14\mathrm{i}|^2=1156+196=1352=26^2\times 2$이므로 예상대로이다. 두 번째 곱에 대해서는 $17^3\times 401\times(1985^2+1)$이 2×1970113^2와 같아야 하는데, 실제로 같다. 수치적으로도 계산기로 두 좌변을 계산하면 모두 $0.785398163\ldots=\pi/4$가 나온다. 예를 들어 $\arctan\frac{7}{17}\approx 0.390607$이고 $\frac{\pi}{4}-2\arctan\frac{1}{5}\approx 0.390607$이다.

흔한 실수

- $2\pi k$만큼의 차이를 배제하지 않고 복소수가 같다는 것으로부터 각이 같다고 결론짓는 것. 범위에 관한 논증은 증명의 실질적인 일부이다.
- $(5-\mathrm{i})^2$에서의 부호 실수. 이 값은 $24-10\mathrm{i}$이므로 $5-\mathrm{i}$는 $-\arctan\frac{1}{5}$를 기여하고, 그래서 이 아크탄젠트가 반대편에서 더하기 부호로 나타난다.

▶ 큰 곱에서의 계산 실수. 위에서처럼 절댓값으로 검산하라.

STEP 너머

이와 같은 항등식을 마친형 공식(Machin-type formulae)이라 한다. John Machin의 공식 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$는 $(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i})$로부터 같은 방법으로 얻어지며, 1706년에 π를 소수점 아래 100자리까지 계산하는 데 쓰였다. 그 바탕에 있는 구조는 가우스 정수 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$의 산술이며, 여기서 가우스 소수(Gaussian primes)로의 소인수분해의 유일성(unique factorisation)이 어떤 항등식들이 존재할 수 있는지를 설명해 준다. 곱셈을 회전으로 보는 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 가우스 정수에 대해서는 Davenport, *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.