풀이

STEP II 2000, 문제 3

순수수학 • 오차의 전파

> **STEP II 2000, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

핵심 아이디어

코사인법칙(cosine rule)은 a^2을 b, c, A로 정확히 나타내 준다. 따라서 이 문제의 핵심은 각 값을 조금씩 움직였을 때 a가 어떻게 변하는지 알아보는 것이다. 모든 재료를 작은 양에 대한 일차(first order)까지 전개하고, 작은 양끼리의 곱은 버린 뒤, 마지막으로 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$를 이용해 제곱근을 취한다. 범위를 구할 때는 η가 서로 독립인 오차들의 일차결합(linear combination)이라는 점에 주목한다. 각 항을 유리한 부호 쪽 극단값으로 밀어붙일 때 η가 가장 커진다.

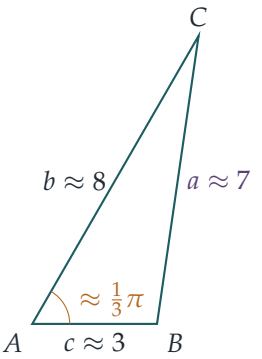
풀이

a의 근삿값

오차가 없는 값 $b = 8$, $c = 3$, $A = \frac{1}{3}\pi$를 코사인법칙에 넣으면

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

이므로 $a = 7$이다. 이것이 첫째 항이 7인 이유이다.



이제 값을 조금 움직여 보자. 이 풀이 전체에서 "≈"는 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$에 대한 일차항만 남기고 ϵ_1^2이나 $\epsilon_2\epsilon_3$처럼 이차 이상인 항은 모두 버린다는 뜻이다. 그러면

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

이다. 각에 대해서는 덧셈정리(compound-angle formula)와 작은 각 근사(small-angle approximation) $\cos\epsilon_3 \approx 1, \sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$을 쓰면

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

을 얻는다. ($\cos\epsilon_3 \approx 1$의 오차는 ϵ_3^2 정도의 크기이므로 이 차수에서는 정말로 무시할 수 있다.) 곱을 전개하고 다시 작은 양끼리의 곱을 버리면

$$2bc\cos A \approx 2(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\right) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

이다. 이 조각들을 코사인법칙에 넣으면

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

이다. 작은 양 $\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$로 놓자. $a > 0$이므로

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\left(1 + \frac{\delta}{49}\right)^{1/2} \approx 7\left(1 + \frac{\delta}{98}\right) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

이다. 여기서 작은 x에 대한 이항전개(binomial expansion) $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$를 사용하였다. 따라서 $a \approx 7 + \eta$이고

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

? 생각해 보기 곱을 손으로 전개하는 수고를 피할 수는 없었을까?

있다. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$를 미분하면 $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$를 얻는다. $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$, $A = \frac{1}{3}\pi$에서 이 식은 $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$가 되어, 한 줄 만에 같은 답이 나온다. 두 방법 모두 결국 일차 테일러 전개(Taylor expansion)일 뿐이다.

η의 범위

시험지에는 ϵ_2의 한계가 옛 방식의 위로 올린 소수점을 써서 $4\cdot 9\times 10^{-2}$로 인쇄되어 있다. 따라서 이는 $|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$라는 뜻이다.

세 오차는 서로 독립적으로 변하므로 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

이다. 분자는 $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$이므로

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

이다. 이 한계는 실제로 도달된다. $\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}$, $\epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}$, $\epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$으로 잡으면 η의 모든 항이 양수이면서 가능한 한 커지므로 $\eta = 0.014$가 되고, 세 부호를 모두 뒤집으면 $\eta = -0.014$가 된다. η는 오차들의 연속함수(continuous function)(사실 일차함수)이고 허용되는 오차들의 집합은 직육면체이므로, 그 사이의 모든 값도 취한다. 따라서 범위는

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

이다. 즉 a는 대략 7 ± 0.014 안에 있다.

검산

- 오차가 모두 0이면 삼각형의 변은 8, 3, 7이고 끼인각이 60°이며, 실제로 $64 + 9 - 24 = 49$이다.
- 위의 극단적인 오차를 넣고 정확한 코사인법칙으로 계산하면 $a \approx 7.0141$과 $a \approx 6.9861$이 나와 7 ± 0.014에 매우 가깝다. 작은 차이는 버린 이차항 때문이다.
- 수치적으로 계산하면 기준값에서 a의 A에 대한 편도함수(partial derivative)는 $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$로, 예측과 일치한다.

흔한 실수

- 마지막에 제곱근 취하는 것을 잊는 실수: $a^2 \approx 49 + \delta$이면 $a \approx 7 + \delta/14$이지 $7 + \delta$가 아니다.
- 최댓값을 구할 때 세 오차를 모두 양수로 잡는 실수: ϵ_2는 음의 부호로 들어가므로 η를 키우려면 음수여야 한다.
- $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$를 36×10^{-2}로 읽는 실수: 길이가 3인 변에 대해 그것은 결코 작은 오차가 아니다.

STEP 너머

이것은 전미분(total differential)을 통한 오차 전파(error propagation)이다. 여러 변수의 함수 f에 대해 $\delta f \approx \sum(\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$이고, 최악의 경우는 $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 다변수 테일러 정리(multivariable Taylor theorem)가 되며, 이차 나머지 항에 대한 명시적인 한계가 "≈"가 정확히 얼마나 좋은 근사인지 알려 준다. 실험 과학자들은 서로 독립인 무작위 오차에 대해 대신 제곱합의 제곱근(root-sum-of-squares) 규칙을 쓰는 경우가 많다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.