풀이

STEP II 2000, 문제 2

순수수학 • 다항식의 중근

> **STEP II 2000, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q2

핵심 아이디어

중복된 인수(factor)는 미분(differentiation)을 해도 살아남지만, 미분할 때마다 거듭제곱이 하나씩 줄어든다. 따라서 4제곱 인수 $(x-a)^4$가 있으면 p와 그 처음 세 도함수(derivative)가 모두 a에서 0이 되어야 한다. 6차 다항식(sextic)의 경우 3계 도함수는 3차식(cubic)에 불과하고, 그 근(root)들이 a의 후보를 아주 짧은 목록으로 줄여 준다. 이 후보들을 검사한 다음, 마지막에 k를 정한다. k는 미분하는 순간 사라지기 때문이다.

풀이

첫 번째 결과

$(x-a)^2$이 인수라고 하자. 그러면 어떤 다항식(polynomial) q에 대하여 $\mathrm{p}(x) = (x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\mathrm{p}'(x) = 2(x-a)\,\mathrm{q}(x) + (x-a)^2\,\mathrm{q}'(x) = (x-a)[\,2\mathrm{q}(x) + (x-a)\mathrm{q}'(x)\,].$$

$x = a$를 대입하면 $\mathrm{p}'(a) = 0$이므로 증명이 끝난다.

대응하는 결과

같은 계산은 임의의 거듭제곱에 대해서도 성립한다. $m \geq 1$이고 g가 다항식일 때 $\mathrm{f}(x) = (x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$이면

$$\mathrm{f}'(x) = (x-a)^{m-1}[\,m\,\mathrm{g}(x) + (x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,],$$

이고, 대괄호 안은 다시 다항식이다. 따라서 $(x-a)^m$이 f를 나누면, $(x-a)^{m-1}$은 f'을 나눈다.

이제 $(x-a)^4$이 $\mathrm{p}(x)$의 인수라고 하자. 이 사실을 세 번 적용하면

$(x-a)^3$이 나누는$\mathrm{p}'(x)$, $(x-a)^2$이 나누는$\mathrm{p}''(x)$, $(x-a)$가 나누는$\mathrm{p}'''(x)$.

$(x-a)^4$이 $\mathrm{p}(x)$ 자체를 나눈다는 사실과 함께, $x=a$를 대입하면

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

k 구하기

$\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$라 하자. 세 번 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 네 조건 가운데 어느 것을 먼저 사용해야 할까?

가장 풀기 쉬운 것을 사용한다. 상수 k는 p'''에서 사라졌고, p'''은 3차식에 불과하며 항을 묶어서 인수분해할 수 있다.

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

따라서 대응하는 결과에 의하여 a는 -2, 1, -1 중 하나여야 한다. 각각을 p''에 넣어 검사한다.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

$a=-2$만 살아남는다. 이 값은 p' 검사도 통과한다.

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

마지막으로 $\mathrm{p}(-2)=0$에서 k가 정해진다.

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0,\qquad \text{따라서}\qquad \boxed{k=48}.$$

? **생각해 보기** 지금까지는 **필요조건**(*necessary condition*)만 사용하였다. $k=48$일 때 $(x+2)^4$이 정말로 인수라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

사실 네 조건 $p(a) = p'(a) = p''(a) = p'''(a) = 0$은 (다항식에 대한 테일러 정리(Taylor's theorem)에 의하여) $(x-a)^4$이 인수임을 함의한다. 하지만 가장 빠르게 확인하는 방법은 직접 전개해 보는 것이다. $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$이므로, 몫(quotient)은 상수항이 $48/16 = 3$이고 최고차항의 계수가 1인(monic) 2차식이어야 한다. x^5의 계수를 맞추면 $x^2 - 4x + 3$을 얻고, 실제로

$$(x+2)^4(x^2 - 4x + 3) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48.$$

따라서 $k = 48$일 때

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

이고, 이 인수는 $a = -2$로서 요구된 꼴을 갖는다.

검산

- $(x+2)^4(x-1)(x-3)$을 완전히 전개한다. 모든 계수가 주어진 다항식과 일치하고, 상수항은 $16 \times 3 = 48$이다.
- 계수의 합을 검사한다. $p(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$이며, $(x-1)$이 인수이므로 당연히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 임의의 다항식 $(x-a)^4q(x)$에 대하여 일반적인 결과를 확인하였고, p'''의 근 $-2, \pm 1$을 구하여 그중 p''이 0이 되는 것은 -2뿐임을 확인하였으며, $k = 48$을 얻었다.

흔한 실수

- $p(a) = 0$이나 $p'(a) = 0$에서 시작하는 것. 이 식들은 5차식(quintic)이나 k 자체를 포함하므로 금방 막다른 길에 이른다. 차수가 가장 낮은 도함수에서 시작하라.
- p'''의 근에서 멈추는 것. 후보 $a = \pm 1$은 p'''의 근이지만 p''의 근은 아니다.
- 대응하는 결과를 "$p'''(a) = 0$"이라고만 쓰는 것. $p(a) = p'(a) = p''(a) = p'''(a) = 0$이라는 조건 전체를 제시하고, 이를 증명하라.

STEP 너머

역(converse)도 성립한다. $(x-a)^m$이 p를 나누는 것은 p와 그 처음 $m-1$개의 도함수가 a에서 모두 0이 되는 것과 동치이다. 다항식은 a를 중심으로 한 자기 자신의 테일러 전개(Taylor expansion)와 같기 때문이다. 대학 1학년 대수학 강의에서는 같은 아이디어로 근의 **중복도**(*multiplicity*)를 정의한다. 이 아이디어는 중근(repeated root)을 판정하는 방법

도 제공한다. 유클리드 호제법(Euclid's algorithm)으로 $\gcd(p, p')$을 계산하면 된다. 소수를 법으로 하는 정수와 같은 체(field) 위에서는 형식적 도함수(formal derivative)가 놀라운 방식으로 행동한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이 내용을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.