풀이

STEP II 2000, 문제 11

역학 • 탄성 끈과 단진동

> **STEP II 2000, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q11

핵심 아이디어

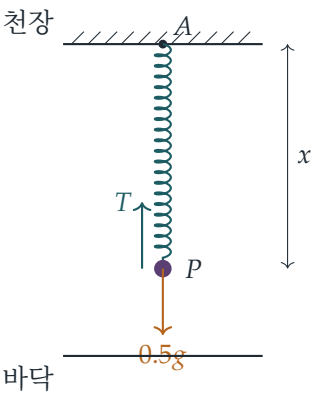
두 정성적 주장은 에너지(energy)로 빠르게 해결된다. 놓는 순간 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)를, 자연 길이와 천장에 도달하는 데 필요한 중력 위치 에너지와 비교하면 된다. 시간을 구할 때는 운동을 두 단계로 나눈다. 줄이 팽팽한 동안 입자는 평형 위치를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 줄이 느슨해지면 중력만 받으며 자유롭게 운동한다. 돌아오는 여정은 올라가는 여정을 거꾸로 되짚는 것이므로, 올라가는 데 걸린 시간을 두 배 하면 된다.

풀이

P를 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄에 매달린 입자로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 한다. x를 A에서 아래쪽으로 잰 P까지의 거리(단위는 미터)라 하자. $x > 1.5$일 때 줄은 팽팽하며, 이때 늘어난 길이는 $x - 1.5$이고 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

이다. 방의 높이는 2.5 m이므로 P는 $x = 2$에서 출발하고, 이때 늘어난 길이는 0.5 m이다.



줄이 느슨해진다

놓는 순간 저장된 탄성 에너지는

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\text{J}.$$

이다. 줄이 자연 길이에 도달하려면 P는 0.5 m 올라가야 하고, 이때 위치 에너지(potential energy)가 $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J만큼 늘어난다. $\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$이므로 P는 여전히 위로 움직이는 채로 $x = 1.5$에 도달하며, 이때 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

이다. 그러므로 P는 줄이 자연 길이가 되는 지점보다 위로 지나가고, 줄은 느슨해진다.

P는 천장에 닿지 않는다

천장에 닿으려면 P는 출발점에서 2 m 올라가야 하고, 위치 에너지가 $0.5g \times 2 = g$ J만큼 늘어나야 한다. 쓸 수 있는 에너지는 놓는 순간 줄에 저장된 $\frac{5g}{12}$ J가 전부이며(줄이 느슨해지면 에너지를 전혀 저장하지 않는다), $\frac{5g}{12} < g$이다. 따라서 P는 천장에 닿을 수 없다.

더 정확히 말하면, 줄이 느슨해진 뒤 P는 속력 v로 연직 방향으로 움직이는 포물체(projectile)이므로 $\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{3}$ m를 더 올라간다. 최고점은 $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$이고, 이는 여전히 천장보다 $\frac{7}{6}$ m 아래이다.

줄이 팽팽한 동안의 단진동

$x > 1.5$일 때 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(아래쪽을 양의 방향으로)에 의해

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

이다. 평형 위치는 우변이 0이 되는 곳이다. 즉 $x - 1.5 = 0.15$이므로 $x = 1.65$이다. 평형 위치 아래쪽으로의 변위를 $y = x - 1.65$라 두자. 그러면

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}y,$$

이고, 이는 $y = 0$을 중심으로 하고 $\omega^2 = \dfrac{20g}{3}$인 단진동이다. 요구된 대로, 이 식은 줄에 장력이 작용하는 동안 언제나 성립한다.

돌아오는 데 걸리는 시간

P는 $y = 2 - 1.65 = 0.35$에서 정지 상태로 출발하므로, 줄이 팽팽한 동안

$$y = 0.35\cos\omega t.$$

이다. 줄은 $x = 1.5$, 즉 $y = -0.15$일 때 느슨해진다. 따라서 이 일이 처음 일어나는 시각 t_1은

$$\cos\omega t_1 = -\frac{0.15}{0.35} = -\frac{3}{7}.$$

을 만족한다.

> **생각해 보기** $\cos\omega t_1 = -\frac{3}{7}$의 해 가운데 어느 것이 필요하며, 그것을 arccos를 써서 어떻게 나타낼까?

t가 0에서부터 증가하면 ωt도 0에서부터 증가하고, $\cos\omega t$가 처음으로 $-\frac{3}{7}$이 되는 것은 ωt가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있을 때이다. $\arccos\frac{3}{7} \in (0, \frac{\pi}{2})$이고 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$이므로, 그 값은 $\omega t_1 = \pi - \arccos\frac{3}{7}$이다. 따라서

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

이다. (검산으로, 이때의 속력은 $\omega\sqrt{0.35^2 - 0.15^2} = \sqrt{\frac{20g}{3} \times 0.1} = \sqrt{\frac{2g}{3}}$이며, 에너지 계산과 일치한다.)

줄이 느슨한 동안 P는 중력만 받으며 운동한다. P는 속력 $v = \sqrt{2g/3}$로 위로 움직이며 $x = 1.5$를 떠나고, 같은 속력으로 아래로 움직이며 $x = 1.5$로 돌아오는데, 이때까지 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}} = \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

이다.

위치에만 의존하는 힘을 받는 운동은 가역적(reversible)이다. P는 떠날 때와 같은 속력으로 $x = 1.5$에서 팽팽한 구간에 다시 들어오므로, 단진동 단계를 거꾸로 되짚으며 다시 t_1의

시간이 지난 뒤 처음 위치인 $y = 0.35$에서 정지한다. 전체 시간은

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &= 2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}) + \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7})\,, \end{aligned}$$

이며, 여기서 $2\sqrt{3/(20g)} = \sqrt{12/(20g)} = \sqrt{3/(5g)}$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 자연 길이에서의 속력을 구하는 두 방법(에너지, 그리고 단진동의 $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$)이 모두 $v^2 = \frac{2g}{3}$을 준다.
- $g = 9.8$로 두면 공식은 약 1.0199 s를 준다. 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀면($x < 1.5$일 때는 장력을 끄고) 출발점에서 다시 정지할 때까지 같은 시간이 나오고, 최고점은 천장보다 $\frac{7}{6}$ m 아래이다.
- 느슨한 단계가 없다면 단진동의 주기는 $2\pi/\omega \approx 0.77$ s일 것이다. 우리가 구한 $2t_1 \approx 0.50$ s는 이보다 작은데, 진동의 일부만 이루어지므로 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 단진동의 중심을 평형 위치가 아니라 자연 길이로 잡는 것. 중력 때문에 중심은 늘어난 길이가 0.15 m인 곳으로 옮겨진다.
- $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$로 두고는 이것이 $\pi - \arccos\frac{3}{7}$임을 알아차리지 못하는 것.
- 돌아오는 여정을 잊는 것. 묻는 시간에는 올라가는 것과 돌아오는 것이 모두 포함되므로, 두 단계 모두 두 배가 된다.

STEP 너머

이것은 구간별로 정의된, 즉 "매끄럽지 않은(non-smooth)" 동역학계(dynamical system)이다. 영역마다 서로 다른 운동 방정식이 성립하고, 해는 경계에서 위치와 속도를 맞추어 이어 붙인다. 튀는 공, 충돌, 스위칭 회로도 같은 아이디어로 다루며, 우리가 사용한 가역성 논증은 보존계에서의 시간 역전 대칭(time-reversal symmetry)을 처음으로 엿보는 것이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.